

Name: _____ Stud.-Gr.: _____ Datum: _____

$$f_1(x) = 6 - 5x + 7x^2 - 14x^3 + x^4 + 2x^5$$

[2 Punkte]

$$f_{1g}(x) = 6 + 7x^2 + x^4$$

$$f_{1u}(x) = -5x - 14x^3 + 2x^5$$

$$f_2(x) = (\sin x + 1)^2 = \sin^2 x + 2\sin x + 1$$

[2 Punkte]

$$f_{2g}(x) = \sin^2 x + 1$$

$$f_{2u}(x) = 2\sin x$$

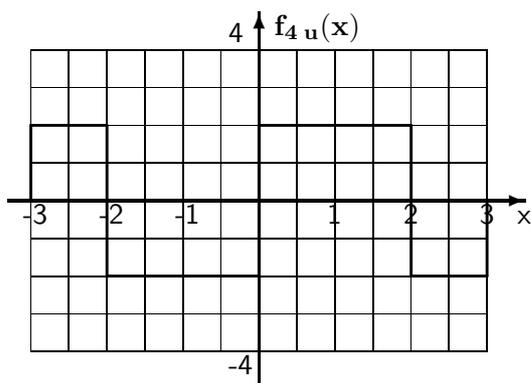
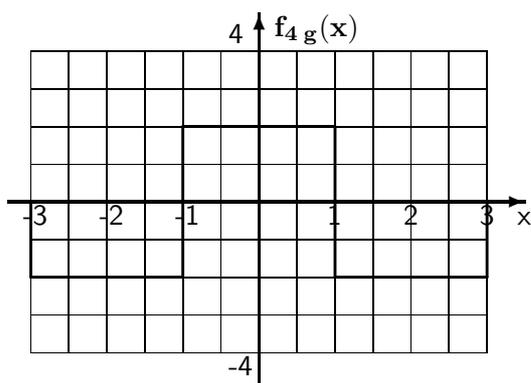
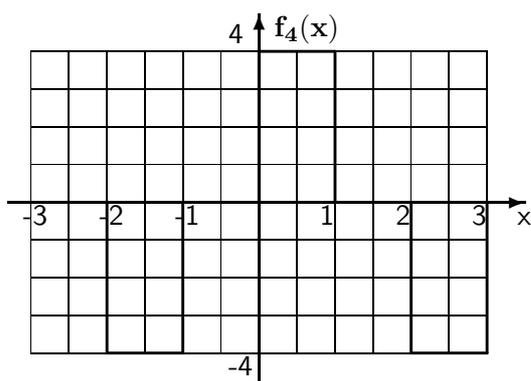
$$f_3(x) = \frac{9 + 2x + 3x^2 - 6x^3}{x^3 + x} = \frac{9 + 3x^2 + 2x - 6x^3}{x(x^2 + 1)}$$

[3 Punkte]

$$f_{3g}(x) = \frac{2 - 6x^2}{x^2 + 1}$$

$$f_{3u}(x) = \frac{9 + 3x^2}{x(x^2 + 1)}$$

4. Aufgabe: [6 Punkte] Zerlegen Sie $f_4(x)$.



5. Aufgabe: [(3·2) Punkte]

Für die drei nichtsinusförmigen Funktionen

$$f_{5a}(t) = 2 \text{ V} \cdot \sin(2\pi \cdot 36 \cdot 10^3 \text{ t/sec}) + \sqrt{5} \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot 84 \cdot 10^3 \text{ t/sec}) + 1 \text{ V} \cdot \sin(2\pi \cdot 180 \cdot 10^3 \text{ t/sec} + 45^\circ)$$

$$f_{5b}(t) = 13 \text{ mA} \cdot \sin(255 \cdot \text{t/sec} + 60^\circ) + 5 \text{ mA} \cdot \sin(85 \cdot \text{t/sec} - 45^\circ) - 3 \text{ mA} \cdot \cos(15 \cdot \text{t/sec} - 90^\circ)$$

$$f_{5c}(t) = 0.7 \text{ V} \cdot \sin(100 \text{ t/sec}) + 1 \text{ V} \cdot \cos(500 \text{ t/sec}) + 2 \text{ V} \cdot \sin(2\pi \cdot 10^3 \text{ t/sec} + 79^\circ)$$

sind soweit möglich zu ermitteln und auf fünf Dezimalstellen genau anzugeben:

1.) Die 'Grundfrequenzen' f_1 im Sinne einer Darstellung dieser Funktionen als Fourier-Reihen.

$$f_1(f_{5a}) = 12 \text{ kHz}$$

$$f_1(f_{5b}) = 0.79577 \text{ Hz}$$

$f_1(f_{5c})$ entfällt, da π irrational ist.

2.) Die zugehörigen Periodendauern T nach denen sich die Funktionen bei mathematisch strenger Betrachtung identisch wiederholen.

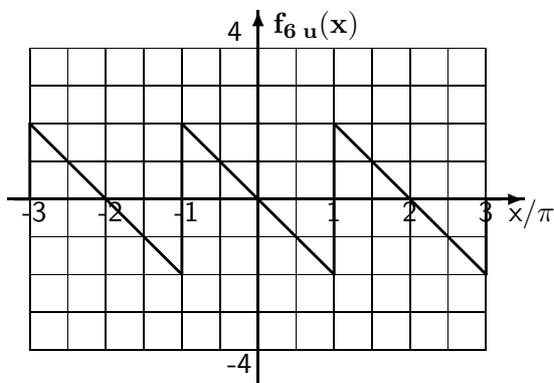
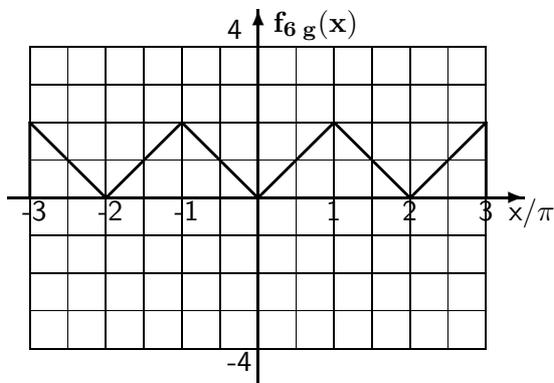
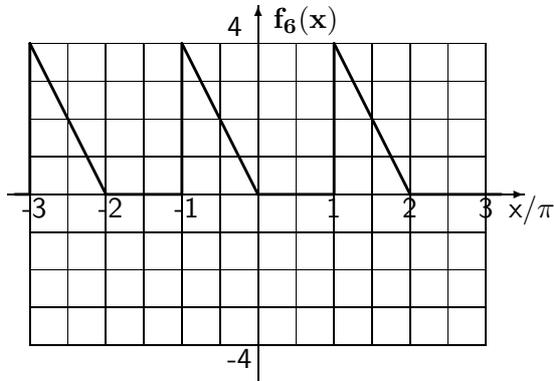
$$T(f_{5a}) = 83.333 \mu\text{sec}$$

$$T(f_{5b}) = 1.2566 \text{ sec}$$

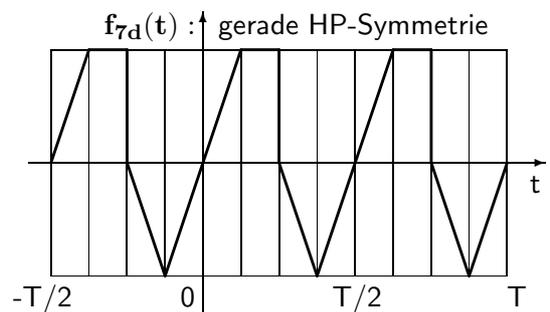
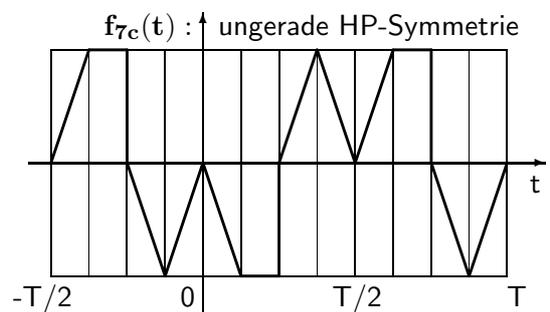
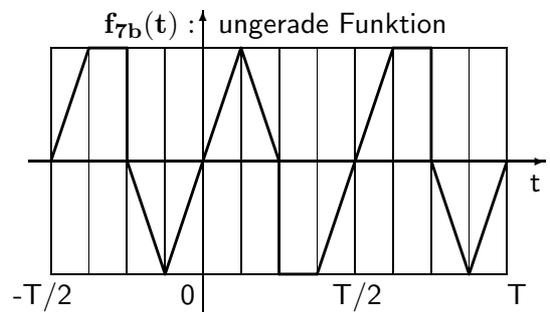
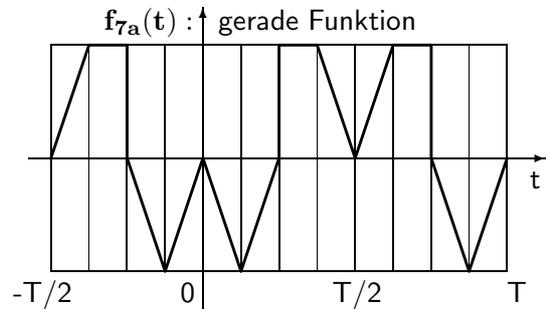
$$T(f_{5c}) \rightarrow \infty \text{ Siehe auch oben.}$$

6. Aufgabe: [6 Punkte]

Die Funktion $f_6(x)$ ist in ihre Bestandteile $f_{6g}(x)$ und $f_{6u}(x)$ zu zerlegen.



7. Aufgabe: [8 Punkte] Ergänzen Sie die vier Bilder im gesamten dargestellten Zeitbereich so, dass jeweils die gewünschte Symmetrie der periodischen Funktion auftritt. Kreuzen Sie in der Tabelle unten links an, welche der reellen Fourier-Koeffizienten entfallen.



Zur 7. Aufgabe:

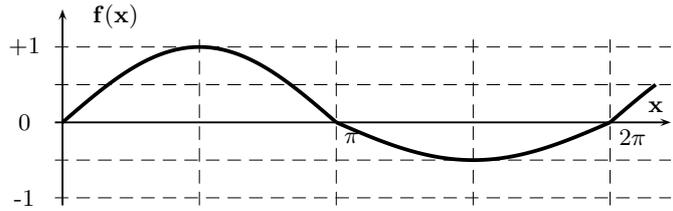
Kreuzen Sie in der Tabelle alle Koeffizienten an, die bei den vier periodischen Funktionen entfallen. (Für die Laufzahl $k = 0, 1, 2, 3, \dots$).

| Fkt. | a_0 | a_{2k} | a_{2k+1} | b_{2k} | b_{2k+1} |
|----------|-------|----------|------------|----------|------------|
| f_{7a} | | | | X | X |
| f_{7b} | X | X | X | | |
| f_{7c} | X | X | | X | |
| f_{7d} | | | X | | X |

Sie haben mit _____ von 32 möglichen Punkten die Note _____ erreicht.

1. Aufgabe

a.) Siehe dazu das Bild



b.) 1.) $f(x) = 0.5 \cdot \sin(x) + 0.5 \cdot f_{12}(x)$

2.) $f(x) = 1.5 \cdot f_{12}(x) - 0.5 \cdot f_{11}(x)$

3.) $f(x) = 0.75 \cdot \sin(x) + 0.25 \cdot f_{11}(x)$

c.) $f(x) = 0.5 \cdot \sin(x) + 0.5 \left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin(x) - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos(2x)}{1 \cdot 3} + \frac{\cos(4x)}{3 \cdot 5} + \frac{\cos(6x)}{5 \cdot 7} + \dots \right) \right]$

$f(x) = \frac{1}{2\pi} + 0.75 \cdot \sin(x) - \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(2x)}{1 \cdot 3} + \frac{\cos(4x)}{3 \cdot 5} + \frac{\cos(6x)}{5 \cdot 7} + \dots \right]$

$a_0 = \frac{1}{2\pi}$; $a_{2k} = -\frac{1}{\pi \cdot (2k-1) \cdot (2k+1)}$ für $k = 1, 2, 3, \dots$; $b_1 = 0.75$; $b_n = 0$ für $n > 1$

2. Aufgabe

Die dargestellte periodische Spannung $u(t)$ lässt sich mit Hilfe der Seite 16 des Skriptums unter Berücksichtigung der Änderung des Arguments von x in t wie folgt in zwei Anteile zerlegen:

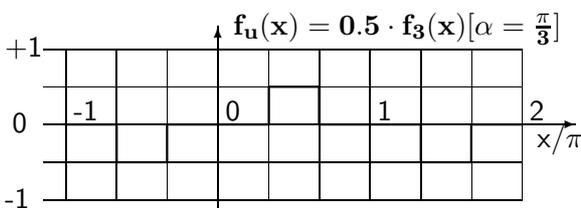
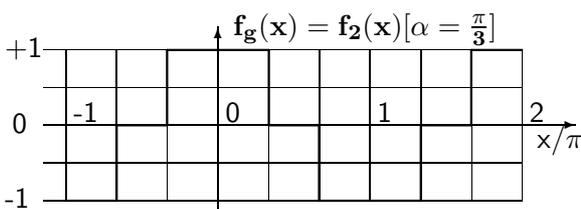
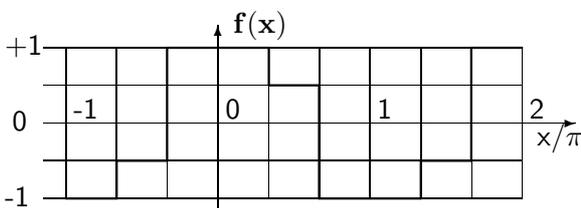
$u(t) = 10 \text{ V} \cdot f_1(t) + (U_{\max} - 10 \text{ V}) \cdot f_3(t) [\alpha = \frac{\pi}{3} \hat{=} 60^\circ]$

Aus den Fourier-Reihen der beiden Teilfunktionen ermittelt man die Amplituden für die Grundschwingung: Beide Funktionen sind ungerade, sodass nur der Koeffizient b_1 zu betrachten ist.

$b_1 = 10 \text{ V} \cdot \frac{4}{\pi} + (U_{\max} - 10 \text{ V}) \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \cos(\frac{\pi}{3}) = 20 \text{ V}$

$b_1 = 20 \text{ V} = \frac{4}{\pi} [10 \text{ V} + 0.5 \cdot U_{\max} - 5 \text{ V}] \implies U_{\max} = 10 \text{ V} \cdot (\pi - 1) = 21.416 \text{ V}$

3. Aufgabe a.) Siehe dazu die Bilder.



b.) $f_g(x) = f_2(x) [\alpha = \frac{\pi}{3}]$

$f_g(x) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin(\pi/3) \cos(x)}{1} + \frac{\sin(3\pi/3) \cos(3x)}{3} + \dots \right]$

$f_u(x) = 0.5 \cdot f_3(x) [\alpha = \frac{\pi}{3}]$

$f_u(x) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos(\pi/3) \sin(x)}{1} + \frac{\cos(3\pi/3) \sin(3x)}{3} + \dots \right]$

c.) $f(x) = f_g(x) + f_u(x)$ mit

$a_0 = 0$; $a_n = b_n = 0$ für $n = 2, 4, 6, \dots$

$a_n = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\sin(n\pi/3)}{n}$ und

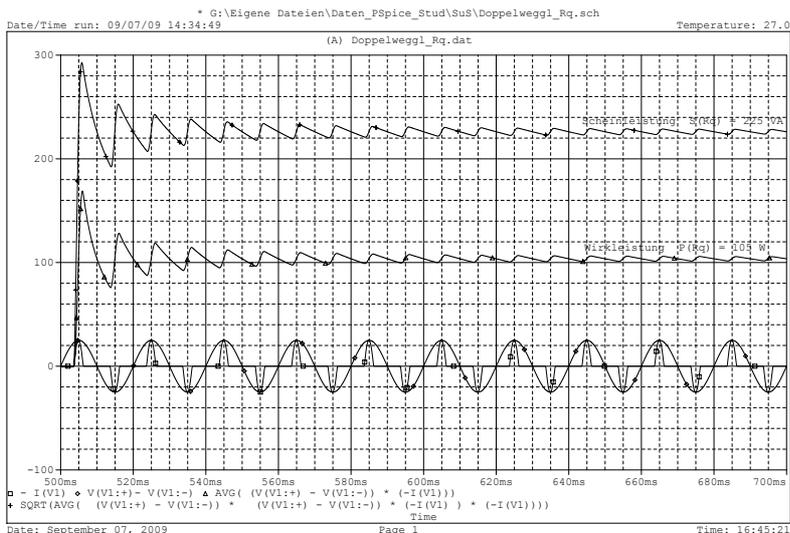
$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos(n\pi/3)}{n}$ für $n = 1, 3, 5, \dots$

d.) $c_0 = a_0 = 0$; $c_n = 0$ für $n = 2, 4, 6, \dots$

$c_n = \frac{a_n - j b_n}{2} = \left[\frac{2 \cdot \sin(n\pi/3) - j \cos(n\pi/3)}{\pi \cdot n} \right]$ für $n = 1, 3, 5, \dots$; $c_{-n} = c_n^* = \frac{a_n + j b_n}{2}$

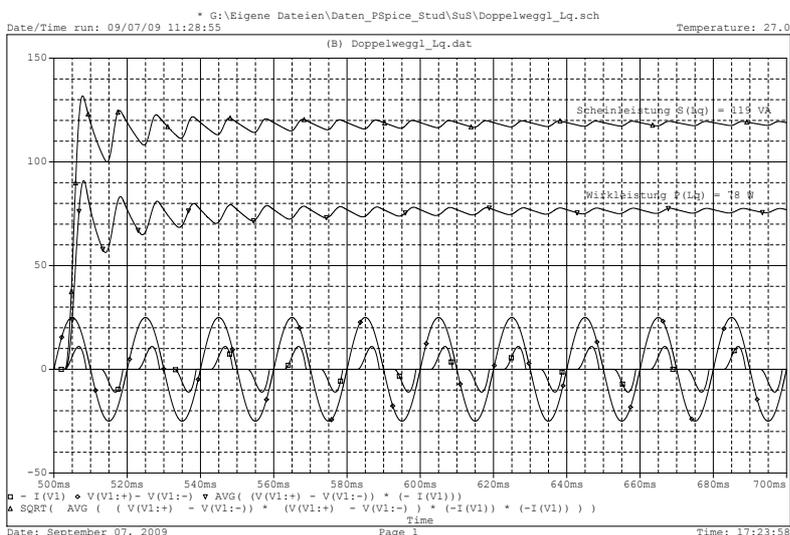
e.) $f(x)$ ist eine gleichanteilfreie Funktion mit ungerader Halbperioden-Symmetrie. Deshalb entfällt der Gleichanteil ($a_0 = 0$) und auch alle geradzahlgigen Anteile ($a_{2k} = b_{2k} = 0$ für $k = 1, 2, 3, \dots$).

1. Aufgabe: Transienten-Analyse Doppelweggleichrichter mit großem Ladekondensator $C_L = 100 \text{ mF}$



Bereits durch die relativ kleine Induktivität $L_q = 1 \text{ mH}$ werden die Anstiegsgeschwindigkeit des Stroms und sein Maximalwert reduziert. Der Stromflusswinkel nimmt zu, der Stromverlauf weicht nicht mehr so extrem von der Sinusform ab und der Leistungsfaktor wird größer.

Verläufe zur 1. Aufgabe: Mit Rq (oben) und mit Lq (unten).



Seit einigen Jahren sind deshalb bei allen Netzteilen elektronische Schaltungen zur Korrektur des Leistungsfaktors (Power Factor Correction, PFC nach EN 61 000-3-2) vorgeschrieben, die durch eine Regelung dafür sorgen, dass auch der Strom im guter Näherung einen sinusförmigen Verlauf aufweist und der Leistungsfaktor dadurch nahe dem Idealwert Eins liegt.

Ein kleiner Wert des Ladekondensators vergrößert den Stromflusswinkel Φ und verkleinert den Maximalwert I_{\max} des Stroms. Bei $C_L = 0 \text{ F}$ (Ohmsche Last) gilt $I_{\max} = 25 \text{ V} / 5 \Omega = 5 \text{ A}$; $\Phi = 180^\circ$.

Zur Berechnung der Wirkleistung geht man wie folgt vor (AVG : average, Mittelwertbildung).

$$P = \frac{1}{t_{\max}} \int_0^{t_{\max}} u(t) \cdot i(t) dt \quad \text{wird ersetzt durch} \quad P = \text{AVG} \left(\underbrace{(V(V1:+) - V(V1:-))}_{\text{Voltage}} \cdot \underbrace{(-I(V1))}_{\text{Current}} \right)$$

Die Scheinleistung wird mit der zugehörigen Gleichung berechnet (SQRT : square root, Quadratwurzel).

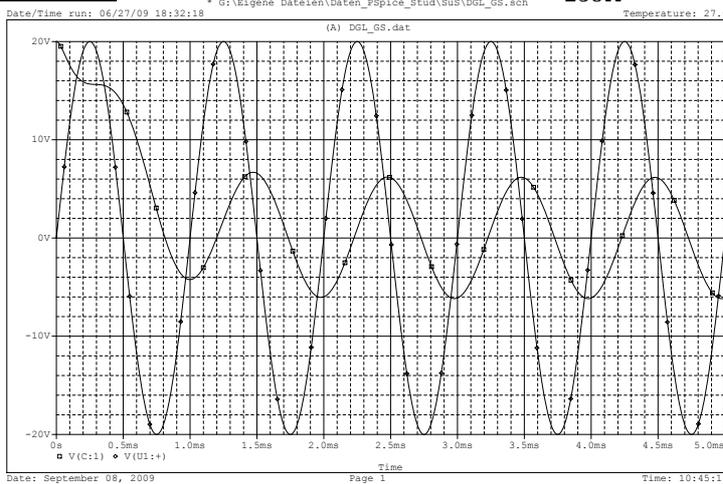
$$S = \sqrt{\frac{1}{t_{\max}} \int_0^{t_{\max}} u^2(t) \cdot i^2(t) dt} \quad \text{die man in PSPICE ersetzt durch den Ausdruck (Klammern!)} \\ S = \text{SQRT}(\text{AVG}((V(V1:+) - V(V1:-)) * (V(V1:+) - V(V1:-)) * (-I(V1)) * (-I(V1))))$$

Für die Stromflusswinkel ermittelt man die Werte $\Phi_{Rq} \approx 45^\circ$; $\Phi_{Lq} \approx 105^\circ$ und die Maximalwerte des Stroms betragen in den beiden Fällen $I_{\max}(Rq) = 25 \text{ A}$; $I_{\max}(Lq) = 11 \text{ A}$.

Der Leistungsfaktor mit R_q beträgt mit $P_{Rq} \approx 105 \text{ W}$ und $S_{Rq} \approx 225 \text{ VA}$ $\lambda_{Rq} \approx 0.4667$ und mit $L_q = 1 \text{ mH}$ erhält man aus $P_{Lq} \approx 78 \text{ W}$ und $S_{Lq} \approx 119 \text{ VA}$ $\lambda_{Lq} \approx 0.6555$.

Wegen des stark verzerrten Stromverlaufs (siehe dazu auch die Fourier-Reihen mit VIEW in den OUTPUT FILES und den Werten für die Total Harmonic Distorsion $\text{THD}[Rq] = 119.64 \%$ [d.h. mehr Leistung in den Oberschwingungen als in der Grundschwingung!] und $\text{THD}[Lq] = 57.31 \%$) müssten die Energieerzeuger bei solchen Verbrauchern ähnlich wie bei Lasten mit Blindanteilen (z. B. Motoren) in erheblichem Umfang Blindleistung bereitstellen. Die dabei auf den Leitungen auftretenden Verluste $I^2 \cdot R_{Ltg}$ können den Kunden von den Energieerzeugern nicht in Rechnung gestellt werden und sollen deshalb minimiert werden.

2. Aufgabe: a.) Anfangswerte: $U_{C,0} = 25 \text{ V} \frac{200\Omega}{250\Omega} = 20 \text{ V}$; $I_{L,0} = \frac{25 \text{ V}}{250\Omega} = 0.1 \text{ A}$



d.) Das Netzwerk ist nicht schwingungsfähig, da der Übergang vom Anfangswert der Spannung an C zu dem neuen eingeschwungenen Zustand (sinusförmiges Signal der Frequenz 1 kHz, Amplitude ca. 6.1 V, gegen die Eingangsspannung um ca. 80° nacheilend) nicht mit einer gedämpften Schwingung sondern exponentiell erfolgt.

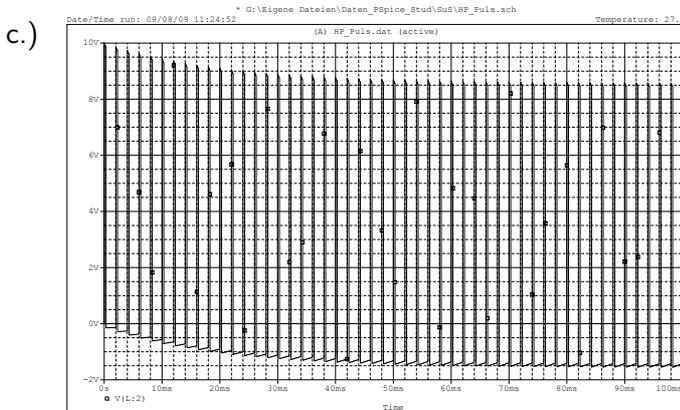
Verläufe zur 2. Aufgabe c.) : $u_E(t)$ und $u_C(t)$.

e.) Aus der Grafik lassen sich nach einer genügend langen Zeit -hier bei $t \approx 5 \text{ msec}$ - Betrag und Winkel der Spannungen am Ausgang (6.1 V, ca. 80° Nacheilung) und am Eingang (20 V, 0°) ablesen und daraus kann die gesuchte Verstärkung berechnet werden

$$\frac{U_C(j2\pi f)}{U_E(j2\pi f)} \Big|_{f=1 \text{ kHz}} \approx \frac{6.1 \text{ V} \cdot e^{-j80^\circ}}{20 \text{ V} \cdot e^{j0^\circ}} \approx 0.305 \cdot e^{-j80^\circ}$$

3. Aufgabe: a.) $\tau_L = \frac{L}{R} = 20 \text{ msec}$; Für die Spannungsübertragung von der Quelle zur Induktivität besitzt das Netzwerk Hochpass-Verhalten (keine Übertragung von Gleichspannung!).

b.) Nach etwa 5 Zeitkonstanten, d.h. nach ca. 100 msec ist der neue, eingeschwungene Zustand erreicht.



e.) Eingeschwungener Zustand:

Zeitbereich 1: $0 \leq t \leq t_0$

$$U_q = U_1 = 10 \text{ V} \quad (t_0 = PW = 300 \mu\text{sec})$$

Zeitbereich 2: $t_0 \leq t \leq T$

$$U_q = U_2 = 0 \text{ V} \quad (T = PER = 2 \text{ msec})$$

Gleiche Spannungs-Zeit-Flächen:

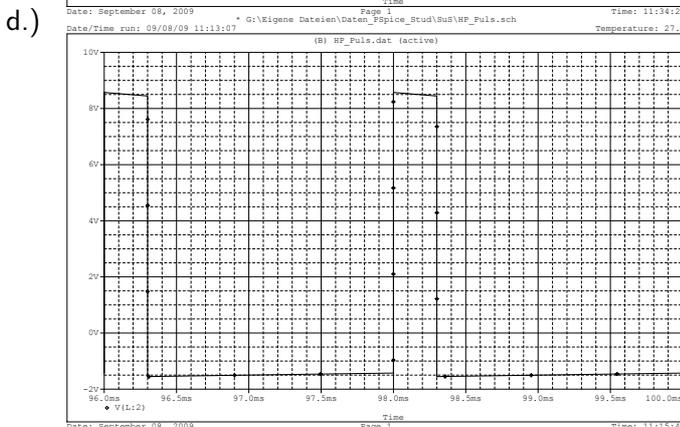
$$U_{\max} \int_0^{t_0} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = -U_{\min} \int_{t_0}^T e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} dt$$

$$\text{mit } U_{\min} = U_{\max} \cdot e^{-\frac{t_0}{\tau}} - U_1$$

Die Integrale sind zu lösen und U_{\min} wird eliminiert.

Als Lösung erhält man dann für den Maximalwert der Spannung an der Induktivität die folgende Gleichung.

$$U_{\max} = U_1 \cdot \frac{1 - e^{-\frac{T-t_0}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}$$



1. Aufgabe:

a.) $\mathbf{u}(t)$ besteht aus zwei Summanden, die je einen Spannungsimpuls beschreiben:

1. Dreieck: Breite $\mathbf{b}_1 = 0.4 \text{ msec}$ [$\tau_1 = 0.2 \text{ msec}$] ; $\hat{u}_1 = 20 \text{ V}$; verschoben um $t_{01} = 0.2 \text{ msec}$
2. Rechteck: Breite $\mathbf{b}_2 = 0.2 \text{ msec}$ [$\tau_2 = 0.2 \text{ msec}$] ; $\hat{u}_2 = -10 \text{ V}$; verschoben um $t_{02} = 0.2 \text{ msec}$

b.) Deshalb besteht auch die Spektraldichtefunktion aus zwei Summanden:

Bei beiden ist eine Verschiebung um die (gleiche) Zeit $t_{01,2} = 0.2 \text{ msec}$ zu berücksichtigen.

$$\underline{\mathbf{U}}(\mathbf{j}\omega) = [20 \text{ V} \cdot 0.2 \text{ msec} \cdot \text{si}^2(\omega \cdot 0.1 \text{ msec}) - 10 \text{ V} \cdot 0.2 \text{ msec} \cdot \text{si}(\omega \cdot 0.1 \text{ msec})] \cdot e^{-\mathbf{j}\omega \cdot 0.2 \text{ msec}}$$

$$\underline{\mathbf{U}}(\mathbf{j}\omega) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Vsec} \cdot [2 \cdot \text{si}^2(\omega \cdot 0.1 \text{ msec}) - \text{si}(\omega \cdot 0.1 \text{ msec})] \cdot e^{-\mathbf{j}\omega \cdot 0.2 \text{ msec}}$$

c.) $|\underline{\mathbf{U}}(\mathbf{0}) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Vsec} = \int_{t=0}^{4 \text{ msec}} \mathbf{u}(t) dt$ [= Spannungs-Zeit-Fläche] Es gilt : $\text{si}(0) = 1$.

Die durch die Exponentialfunktion beschriebene Verzögerung besitzt bei allen Frequenzen den Betrag Eins. Sie bewirkt einen (zusätzlichen) Beitrag zu dem Winkel ohne den Betrag der Spektraldichtefunktion zu ändern.

2. Aufgabe:

a.) Für die gegebene Zeitfunktion $\mathbf{u}(t)$ ist (nach Seite 34 des Skriptums) zutreffend:

1. $\mathbf{u}(t)$ ist ungerade
2. $\underline{\mathbf{U}}(\mathbf{j}\omega)$ ist ungerade
3. $\underline{\mathbf{U}}(\mathbf{j}\omega)$ ist imaginär

b.) Die Gleichung zur bereichsweisen Definition der einmaligen Zeitfunktion $\mathbf{u}(t)$ lautet mit einer 'Periodendauer' der Signalschwingung $\mathbf{T}_S = 20 \mu\text{sec}$ und daraus folgend der 'Frequenz' $\mathbf{f}_S = 1/\mathbf{T}_S = 50 \text{ kHz}$ sowie der 'Kreisfrequenz' $\omega_S = 2\pi\mathbf{f}_S = \pi \cdot 10^5 \frac{1}{\text{sec}}$

$$\mathbf{u}(t) = -1 \text{ V} \cdot \sin(2\pi\mathbf{f}_S t) = -1 \text{ V} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10 \mu\text{sec}} t\right) \quad \text{für } -10 \mu\text{sec} \leq t \leq +10 \mu\text{sec}; \quad 0 \text{ V} \quad \text{sonst}$$

c.) Den prinzipiellen Verlauf von $\mathbf{u}(t)$ erhält man durch Ableitung eines verschobenen Cosinus-Impulses

mit $\tau = \frac{1}{2\mathbf{f}_S} = 10 \mu\text{sec} = 10^{-5} \text{ sec}$, wie er auf Seite 36 als $\mathbf{f}_g(t)$ dargestellt ist.

$$\mathbf{f}_g(t) = \hat{u} \cdot \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{\tau} t\right)}{2} \quad \iff \quad \underline{\mathbf{F}}_g(\mathbf{j}\omega) = \hat{u} \cdot \frac{\tau \cdot \text{si}(\omega\tau)}{1 - [\omega\tau/\pi]^2}$$

Nun berechnet man die zeitliche Ableitung von $\mathbf{f}_g(t)$ und setzt diese mit der unter b.) ermittelten Spannung $\mathbf{u}(t)$ gleich.

$$\frac{d\mathbf{f}_g(t)}{dt} = -\hat{u} \cdot \frac{\pi}{2\tau} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\tau} t\right) = \mathbf{u}(t) = -1 \text{ V} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10^{-5} \text{ sec}} t\right)$$

Als Rechengröße erhält man so den erforderlichen 'Scheitelwert' $\hat{u} = 1 \text{ V} \cdot \frac{2\tau}{\pi} = 6.3662 \cdot 10^{-6} \text{ Vsec}$.

Bei der Fourier-Transformierten ist hierzu (nach Seite 35 oben) nur eine Multiplikation mit $\mathbf{j}\omega$ erforderlich. Dadurch ergibt sich für die Spektraldichtefunktion auch wieder die richtige Einheit Vsec.

$$\underline{\mathbf{U}}(\mathbf{j}\omega) = \mathbf{j}\omega \cdot 6.3662 \cdot 10^{-11} \text{ Vsec}^2 \cdot \frac{\text{si}(\omega \cdot 10^{-5} \text{ sec})}{1 - [\omega \cdot 10^{-5} \text{ sec}/\pi]^2}$$

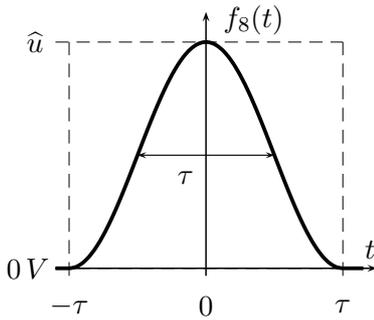
Diese Funktion ist wie unter a.) angegeben ungerade und rein imaginär.

d.) Die si-Funktion bestimmt mit einer Ausnahme die Nullstellen im Spektrum. Bei $\omega = \omega_S$ werden jedoch Zähler und Nenner gleichzeitig Null: Nach l'Hospital ergibt sich an dieser Stelle ein endlicher Wert $\neq 0$.

Die erste Nullstelle von $|\underline{\mathbf{U}}(\mathbf{j}2\pi\mathbf{f})|$ tritt deshalb erst bei der Frequenz auf, bei der das Argument der si-Funktion den Wert 2π annimmt:

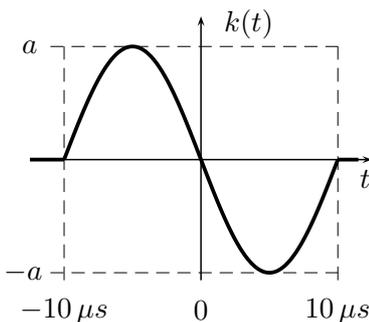
$$\omega_0\tau = 2\pi = 2\pi\mathbf{f}_0\tau \quad \implies \quad \mathbf{f}_0 = \frac{1}{\tau} = 100 \text{ kHz}$$

Der erste Lösungsweg ist -ohne Bilder- auf dem Lösungsblatt zur 2. Aufgabe dargestellt.



Ausgehend von $f_s(t) = \frac{\hat{u}}{2} \cdot [1 + \cos(\frac{\pi}{\tau} \cdot t)]$ auf Seite 36 ermittelt man die Ableitung dieser Funktion nach der Zeit, die einen gleichartigen Verlauf besitzt, wie die gegebene Spannung $u(t)$.

$$\frac{df_s(t)}{dt} = -\frac{\hat{u} \cdot \pi}{2 \cdot \tau} \cdot \sin(\frac{\pi}{\tau} \cdot t) = \boxed{k(t) = -a \cdot \sin(\frac{\pi}{\tau} \cdot t)}$$



Der Vergleich von $k(t)$ mit $\boxed{u(t) = -1 V \cdot \sin(2\pi \cdot 50 kHz \cdot t)}$ ergibt

1. $\tau = 10 \mu sec$ (Argumente der sinus-Funktionen: $\frac{\pi}{\tau} = 2\pi \cdot 50 kHz$)

2. aus $a = 1 V$ die Rechengröße $\hat{u} = \frac{1 V \cdot 2\tau}{\pi} = 6.3662 \cdot 10^{-6} V sec$.

Die zu $u(t)$ gehörige Spektraldichtefunktion folgt aus

$$F_s(j\omega) = \frac{\hat{u} \cdot \tau \cdot si(\omega \cdot \tau)}{1 - [\omega \cdot \tau / \pi]^2},$$

wobei dort die oben ermittelten Werte für τ und \hat{u} eingesetzt werden und für die im Zeitbereich durchgeführte Ableitung im Bild- oder Spektralbereich eine Multiplikation mit $j\omega$ erforderlich ist.

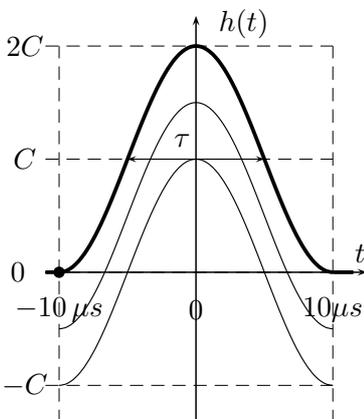
$$\underline{U}(j\omega) = j\omega \cdot \frac{6.3662 \cdot 10^{-11} V sec^2 \cdot si(\omega \cdot 10^{-5} sec)}{1 - [\omega \cdot 10^{-5} sec / \pi]^2}$$

Bei dem zweiten Lösungsweg wird die Spektraldichtefunktion des Integrals der gegebenen Spannung ermittelt. Das Ergebnis der Integration besitzt einen gleichartigen Verlauf wie $f_s(t) = \frac{\hat{u}}{2} \cdot [1 + \cos(\frac{\pi}{\tau} \cdot t)]$.

$$h(t) = \int u(t) dt + C = -1 V \int \sin(2\pi \cdot 50 kHz \cdot t) dt + C = \frac{1 V}{2\pi \cdot 50 kHz} \cdot \cos(2\pi \cdot 50 kHz \cdot t) + C$$

Wahl der Integrationskonstante C so, dass gilt $h(t = -10 \mu sec) = 0 V sec$ [Im Bild mit • markiert].

$$C = \frac{1 V}{2\pi \cdot 50 kHz} = 3.1831 \cdot 10^{-6} V sec \Rightarrow \boxed{h(t) = 3.1831 \cdot 10^{-6} V sec \cdot [1 + \cos(2\pi \cdot 50 kHz \cdot t)]}$$



Der Vergleich von $h(t)$ mit $\boxed{f_s(t) = \frac{\hat{u}}{2} \cdot [1 + \cos(\frac{\pi}{\tau} \cdot t)]}$ ergibt

1. $\tau = 10 \mu sec$ (Argumente der cosinus-Funktionen: $\frac{\pi}{\tau} = 2\pi \cdot 50 kHz$)

2. aus $C = \hat{u}/2$ die Rechengröße $\hat{u} = 2C = 6.3662 \cdot 10^{-6} V sec$.

Die zu $u(t)$ gehörige Spektraldichtefunktion folgt auch hier aus

$$F_s(j\omega) = \frac{\hat{u} \cdot \tau \cdot si(\omega \cdot \tau)}{1 - [\omega \cdot \tau / \pi]^2} = \underline{H}(j\omega),$$

wobei noch die oben ermittelten Werte für τ und \hat{u} einzusetzen sind.

Da $u(t)$ per Ableitung aus $h(t)$ hervorgeht, ist auch hier wegen der Ableitung im Zeitbereich die Funktion $\underline{H}(j\omega)$ mit $j\omega$ zu multiplizieren.

$$\underline{U}(j\omega) = j\omega \cdot \frac{6.3662 \cdot 10^{-11} V sec^2 \cdot si(\omega \cdot 10^{-5} sec)}{1 - [\omega \cdot 10^{-5} sec / \pi]^2}$$

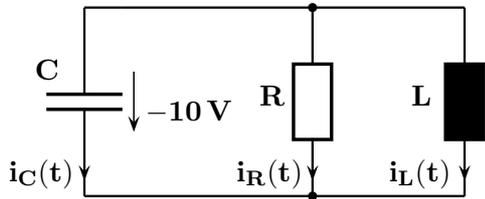
Einheit der Spektraldichtefunktion $\underline{U}(j\omega) : [\underline{U}(j\omega)] = V sec^2 \cdot [\omega] = V sec$.

a.) Bei $t = t_1^+$ gilt: $i_L(t) = 0$; $u(t) = 0 = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \rightarrow \frac{di_L(t)}{dt} = 0 \frac{A}{sec}$

Bei $t = t_2^-$ gilt: $i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt = \frac{6}{25H} \int_0^{0.5 sec} 100 V \cdot [\frac{t}{sec}]^2 dt = \frac{6 \cdot 100 V}{25 H} \cdot \frac{(0.5 sec)^3}{3 sec^2} = 1 A$

$u_L(t) = 25 V = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$; $\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{25 V}{L} = \frac{6 \cdot 25 V}{25 H} = 6 \frac{A}{sec}$; $i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = 25 V \cdot \frac{24}{25 Ohm} = 24 A$

Bei $t = t_2^+$ gilt das dargestellte Schaltbild mit den folgenden Signalwerten:



$i_R(t) = \frac{-10 V}{R} = -9.6 A$; $i_L(t) = 1 A \rightarrow i_C(t) = 8.6 A$

$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = 8.6 A \rightarrow \frac{du_C(t)}{dt} = 8.958 \frac{V}{sec}$

$u_L(t) = -10 V = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \rightarrow \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{-10 V}{L} = -2.4 \frac{A}{sec}$

| Pos. | S | Zeitpunkt | u(t)/V | u _C (t)/V | i _C (t)/A | $\frac{du_C(t)}{dt} / \frac{V}{sec}$ | i _L (t)/A | $\frac{di_L(t)}{dt} / \frac{A}{sec}$ | i _R (t)/A |
|------|---|------------------------|--------|----------------------|----------------------|--------------------------------------|----------------------|--------------------------------------|----------------------|
| 0 | | $t = -t_2$ | 25 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | | $t = t_1^-$ | 0 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | | $t = t_1^+$ | 0 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | | $t = t_2^-$ | 25 | -10 | 0 | 0 | 1 | 6 | 24 |
| 2 | | $t = t_2^+$ | 25 | -10 | 8.6 | 8.958 | 1 | -2.4 | -9.6 |
| 2 | | $t \rightarrow \infty$ | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

b.) Knotenpunktgleichung: $i_C(t) + i_R(t) + i_L(t) = 0 \rightarrow C \cdot \dot{u}_C(t) + \frac{u_C(t)}{R} + \frac{1}{L} \int u_C(t) dt = 0$

Daraus folgt die Normalform der DGL: $\ddot{u}_C(t) + \dot{u}_C(t) \cdot \frac{1}{RC} + u_C(t) \cdot \frac{1}{LC} = 0$

c.) $\lambda^2 + \lambda \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC} = 0$ ergibt mit $RC = 1 sec$ und mit $LC = 4 sec^2 \rightarrow \lambda_{1,2} = \lambda = -0.5 \frac{1}{sec}$

Dieser Fall mit reellen, doppelten Eigenwerten wird auch als aperiodischer Grenzfall bezeichnet, da das betrachtete System bei der vorliegenden Dimensionierung gerade nicht schwingungsfähig ist.

d.) Lösungsansatz (DGL ist homogen) mit $\tilde{t} = t - t_2$: $u_{Ch}(\tilde{t}) = A \cdot e^{\lambda \tilde{t}} + \tilde{t} \cdot B \cdot e^{\lambda \tilde{t}}$

Für $\tilde{t} = 0^+$ erhält man aus der DGL den Wert der Konstante A: $u_{Ch}(\tilde{t}) = -10 V = A$.

Mit Hilfe der Ableitung von $u_C(\tilde{t})$ $\dot{u}_{Ch}(\tilde{t}) = \lambda A \cdot e^{\lambda \tilde{t}} + B \cdot e^{\lambda \tilde{t}} + \lambda \tilde{t} \cdot B \cdot e^{\lambda \tilde{t}} = 8.958 \frac{V}{sec}$

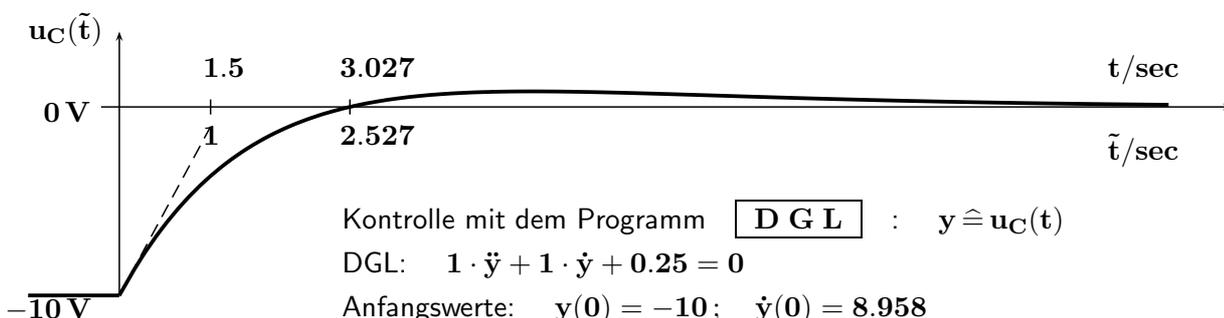
findet man $\lambda A + B = 8.958 \frac{V}{sec}$ und daraus den Wert für die zweite Konstante $B = 3.958 \frac{V}{sec}$

Die vollständige Lösung lautet damit $u_C(\tilde{t}) = -10 V \cdot e^{-\tilde{t}/2 sec} + 3.958 \frac{V}{sec} \cdot \tilde{t} \cdot e^{-\tilde{t}/2 sec}$

oder $u_C(t) = -10 V \cdot e^{-(t-0.5 sec)/2 sec} + 3.958 \frac{V}{sec} \cdot (t - 0.5 sec) \cdot e^{-(t-0.5 sec)/2 sec}$

e.) $u_C(\tilde{t}) = e^{-\tilde{t}_0/2 sec} [-10 V + 3.958 \frac{V}{sec} \cdot \tilde{t}_0] = 0 V \rightarrow \tilde{t}_0 = \frac{10 V}{3.958 \frac{V}{sec}} = 2.527 sec$; $t_0 = 3.027 sec$

f.) Der im Bild dargestellte Verlauf wurde punktweise berechnet. Die geforderte Skizze sollte die bei a.) und e.) ermittelten Werte ($u_C(t)$, $\frac{du_C(t)}{dt}$, t_0) enthalten und den Verlauf qualitativ darstellen.



a.) Das Netzwerk bewirkt Bandpass-Verhalten da sehr tiefe Frequenzen durch die Serien-Kapazität C und sehr hohe Frequenzen durch die Serien-Induktivität L gesperrt werden.

b.) Serienschwingkreis: Bei der Resonanzkreisfrequenz $\omega_0 = \omega_{res} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 447.21 \frac{1}{sec}$ heben sich die Wirkungen der beiden Blindwiderstände auf ($\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$) und wegen des reellen Gesamtwiderstandes besteht dann keine Phasenverschiebung zwischen den beiden Spannungen.

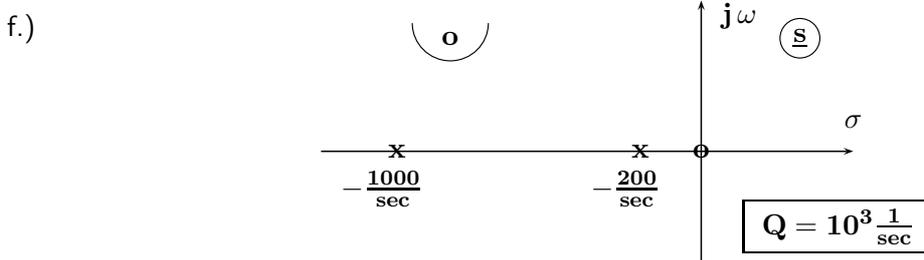
c.)
$$\underline{G}(s) = \frac{\underline{U}_A(s)}{\underline{U}_E(s)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{sR_2C}{1 + sC(R_1 + R_2) + s^2LC}$$

d.) Mit $R_2C = 5 \cdot 10^{-3} sec$; $C(R_1 + R_2) = 6 \cdot 10^{-3} sec$; $LC = 5 \cdot 10^{-6} sec^2$ erhält man

$$\underline{G}(s) = \frac{\underline{U}_A(s)}{\underline{U}_E(s)} = \frac{s \cdot 5 \cdot 10^{-3} sec}{1 + s \cdot 6 \cdot 10^{-3} sec + s^2 \cdot 5 \cdot 10^{-6} sec^2}$$

e.) $Q = \frac{R_2C}{LC} = 10^3 \frac{1}{sec}$; $s_{\infty 1,2} = [-600 \pm \sqrt{36 \cdot 10^4 - 20 \cdot 10^4}] \frac{1}{sec} = (-600 \pm 400) \frac{1}{sec}$

$$\underline{G}(s) = \frac{\underline{U}_A(s)}{\underline{U}_E(s)} = 10^3 \frac{1}{sec} \cdot \frac{s}{s^2 + s \cdot 1.2 \cdot 10^3 \frac{1}{sec} + 2 \cdot 10^5 \frac{1}{sec^2}} = 10^3 \frac{1}{sec} \cdot \frac{s}{(s + 10^3 \frac{1}{sec})(s + 200 \frac{1}{sec})}$$



Das Netzwerk ist nicht schwingungsfähig (zwei verschiedene reelle Pole \Rightarrow aperiodisches Verhalten).

g.) $\underline{U}_E(s) = \frac{2.5 V/sec}{s^2}$; $\underline{U}_A(s) = \underline{U}_E(s) \cdot \underline{G}(s) = \frac{2.5 V/sec}{s^2} \cdot \frac{10^3 \frac{1}{sec} \cdot s}{(s + 10^3 \frac{1}{sec})(s + 200 \frac{1}{sec})} = \frac{2.5 \cdot 10^3 \frac{V}{sec^2}}{s(s + 10^3 \frac{1}{sec})(s + 200 \frac{1}{sec})}$

h.) Die Rücktransformation nach Seite 64 Nr. 19 mit $a = \frac{1000}{sec}$; $b = \frac{200}{sec}$

und der Konstante $2.5 \cdot 10^3 \frac{V}{sec^2}$ ergibt die gesuchte Zeitfunktion

$$\underline{u}_A(t) = \frac{2.5 \cdot 10^3 \frac{V}{sec^2}}{2 \cdot 10^5 \frac{1}{sec^2}} \left[1 + \frac{\frac{200}{sec} \cdot e^{-1000 t/sec} - \frac{1000}{sec} \cdot e^{-200 t/sec}}{\frac{800}{sec}} \right] \cdot \sigma(t)$$

$$\underline{u}_A(t) = 12.5 mV [1 + 0.25 \cdot e^{-1000 t/sec} - 1.25 \cdot e^{-200 t/sec}] \cdot \sigma(t)$$

Es treten zwei Zeitkonstanten auf: $\tau_1 = -\frac{1}{RE\{s_{\infty 1}\}} = 1 msec$; $\tau_{\infty 2} = -\frac{1}{RE\{s_2\}} = 5 msec$

Sie können das Ergebnis mit dem Programm **LAPLACE** kontrollieren:

Eingabe der normierten Übertragungs-Funktion als GRAD 6: $\underline{G}(s) = \frac{s \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{1 + s \cdot 6 \cdot 10^{-3} + s^2 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}$
 Berechnung wählen / Zeitverhalten / Antwort auf allg. Signal mit $\underline{E}(s) = \frac{2.5}{s^2}$ für $t_{max} = 0.1$

i.) $\underline{u}_A(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{2.5 \cdot 10^3 \frac{V}{sec^2}}{s(s + 10^3 \frac{1}{sec})(s + 200 \frac{1}{sec})} \right] = \frac{2.5 \cdot 10^3 \frac{V}{sec^2}}{2 \cdot 10^5 \frac{1}{sec^2}} = 12.5 mV$

Das gleiche Ergebnis erhält man natürlich auch aus $\underline{u}_A(t \rightarrow \infty)$ nach h.).

j.) Multipliziert man das Ergebnis von d.) über Kreuz aus, erhält man zunächst

$$\underline{U}_A(s) \cdot (1 + s \cdot 6 \cdot 10^{-3} sec + s^2 \cdot 5 \cdot 10^{-6} sec^2) = \underline{U}_E(s) \cdot s \cdot 5 \cdot 10^{-3} sec$$

und da alle Anfangswerte gleich Null sind (dann gilt $s \Rightarrow \frac{d}{dt}$) daraus

$$\underline{u}_A(t) + \dot{\underline{u}}_A(t) \cdot 6 \cdot 10^{-3} sec + \ddot{\underline{u}}_A(t) \cdot 5 \cdot 10^{-6} sec^2 = \dot{\underline{u}}_E(t) \cdot 5 \cdot 10^{-3} sec.$$

Durch Umformen und Einsetzen von $\dot{\underline{u}}_E(t) = \frac{2.5 V}{sec}$ findet man die Normalform der DGL:

$$\ddot{\underline{u}}_A(t) + 1200 \frac{1}{sec} \cdot \dot{\underline{u}}_A(t) + 2 \cdot 10^5 \frac{1}{sec^2} \cdot \underline{u}_A(t) = 2500 \frac{V}{sec^2}$$

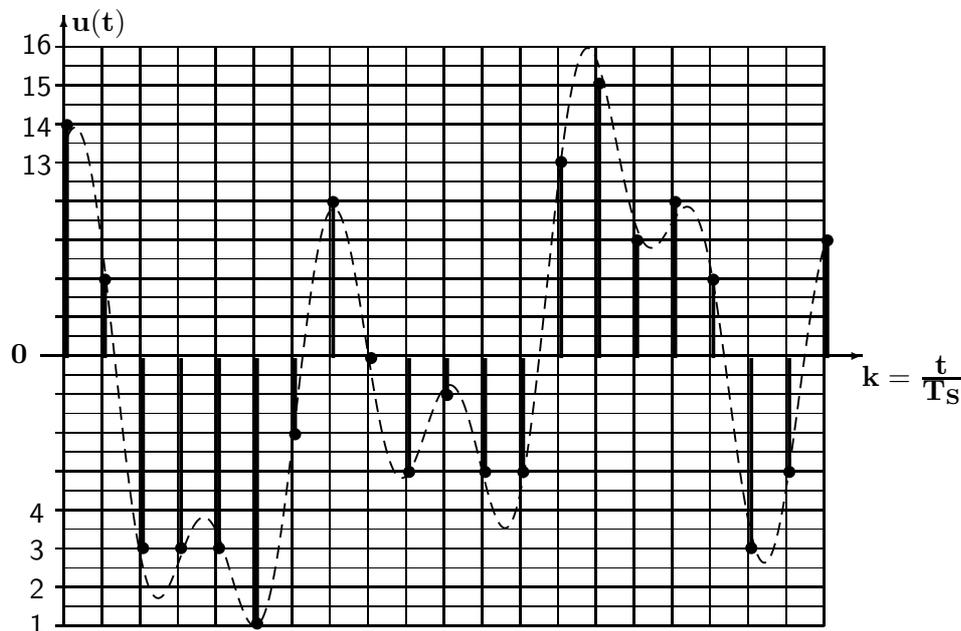
1. Aufgabe: Die Stufenhöhe der Spannungswerte beträgt $\Delta U = 2 \cdot \Delta U_q = 100 \mu V$.

Im Bereich $-11 V \leq U < 0 V$ liegen $n_n = 11 V / 100 \mu V = 110\,000$ Stufen und der positive Bereich $0 V \leq U \leq 11 V + \Delta U$ enthält immer eine Stufe mehr: $n_p = 110\,001$.

Insgesamt sind also $n = n_p + n_n = 220\,001$ Stufen erforderlich und die nötige Bitzahl N folgt aus $n = 2^N - 1 \Rightarrow N = \log(220\,002) / \log(2) = 17.747 \text{ Bit}$ ganzzahlig aufgerundet $N = 18 \text{ Bit}$.

2. Aufgabe:

Da das Signal 16 Werte annehmen kann besitzt der Analog- Digital- Wandler eine Auflösung von 4 Bit ($2^4 = 16$).

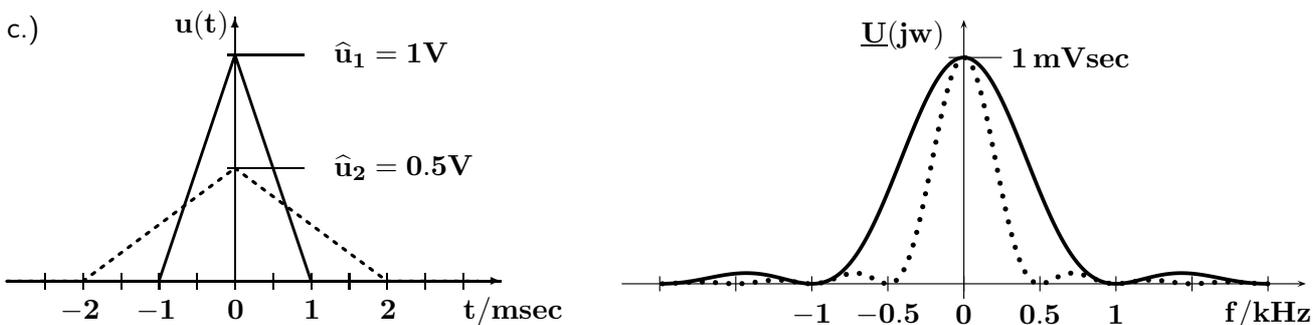


3. Aufgabe: a.) $\text{si}^2(\frac{\omega \cdot T_0}{2}) = 0$ falls $\frac{\omega_1 \cdot T_0}{2} = \pi \Rightarrow f_1 = \frac{1}{T_0}$.

b.) Das Maximum der **si** – **Funktion** besitzt den Wert 1 und tritt bei der Frequenz auf, bei der das Argument den Wert 0 annimmt: $f_{\text{max}} = 0 \text{ Hz}$. Gleiches gilt auch für die hier betrachtete **si**² – **Funktion**.

Der Maximalwert der Spektraldichtefunktion ist deshalb in diesem Beispiel gleich dem konstanten Faktor, der bei der **si**² – **Funktion** steht: $U_{\text{max}} = \hat{u} \cdot T_0$.

c.)



d.) Aus $c_n = \frac{1}{T} \cdot \underline{U}(j\omega)|_{\omega=n\omega_1}$ erhält man mit $\underline{U}(j\omega) = \hat{u} \cdot T_0 \cdot \text{si}^2(\frac{\omega \cdot T_0}{2})$ und $T = 8 \cdot T_0$

für den Gleichanteil mit $n = 0$: $c_0 = \frac{1V \cdot 1 \text{ msec}}{8 \text{ msec}} \cdot \text{si}^2(0) = 0.125\,00 \text{ V}$

und für die Grundschwingung mit $n = 1$: $c_1 = \frac{1V \cdot 1 \text{ msec}}{8 \text{ msec}} \cdot \text{si}^2(\frac{\pi}{8}) = 0.118\,71 \text{ V}$.

Da die Zeitfunktion $u_p(t)$ eine gerade Funktion ist, entfallen bei allen komplexen Fourier-Koeffizienten die Imaginärteile.

e.)



1. Aufgabe: Gegeben ist das Amplitudenspektrum am Eingang eines DSP-Systems, das als digitales Bandpassfilter (Abtastfrequenz: $f_S = 1000 \text{ Hz}$) mit den folgenden Kennwerten arbeitet:

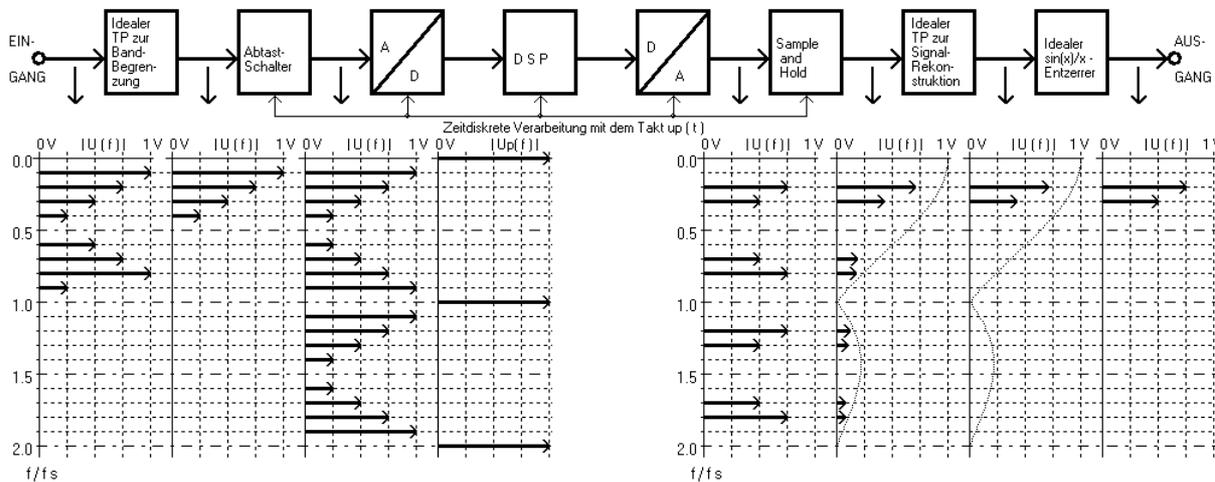
Unterer Sperrbereich : $0 \leq f \leq f_{Su} = 110 \text{ Hz}$.

Durchlassbereich: $f_{Du} = 190 \text{ Hz} \leq f \leq f_{Do} = 310 \text{ Hz}$.

Oberer Sperrbereich: $f \geq f_{So} = 390 \text{ Hz}$.

Verstärkung im Durchlassbereich: $v_D \approx 1$.

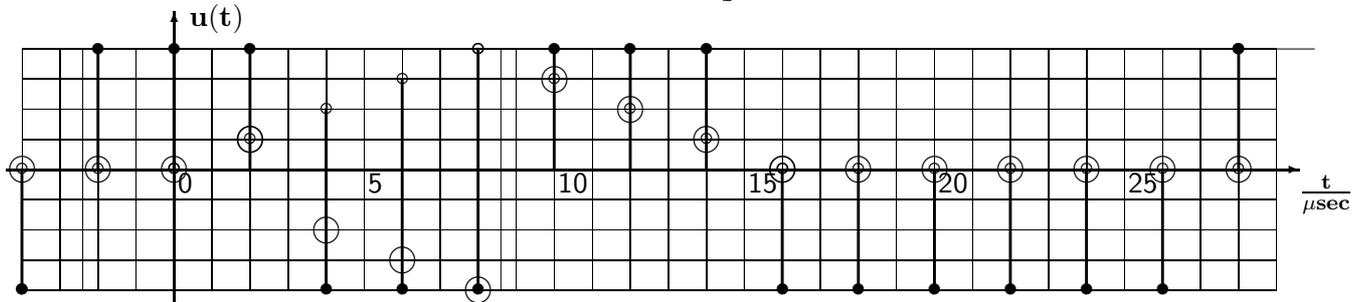
Verstärkung in beiden Sperrbereichen: $v_S \approx 0$.



a.) Die Lösung ist in dem oben stehenden Bild eingetragen.

b.) Die 'Grundfrequenz' zu den beiden am Ausgang auftretenden Frequenzen 200 Hz und 300 Hz ist $f = 100 \text{ Hz}$. Die zugehörige Periodendauer beträgt $T = \frac{1}{f} = 10 \text{ msec}$

2. Aufgabe: Das Abtastintervall beträgt hier $T_S = \frac{1}{f_S} = 2 \mu\text{sec}$.



a.) Symbol für die Abtastwerte $u[k]$: •

b.) Symbol für das Dreieckfenster $w[k]$: ○

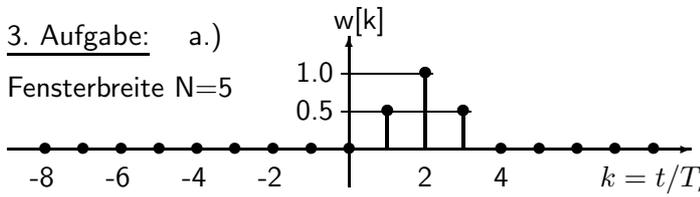
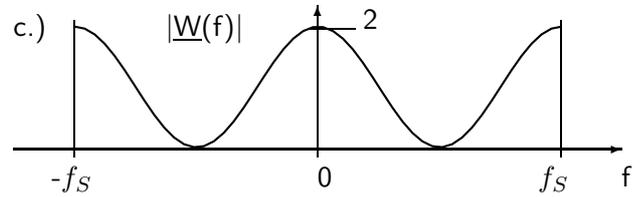
c.) Symbol für die Folge $y[k] = u[k] \cdot w[k]$: ⊕

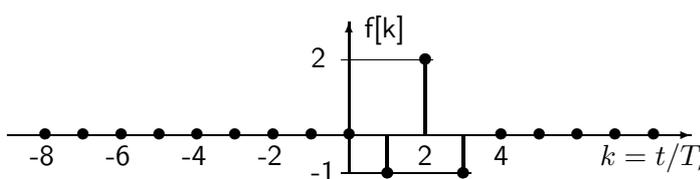
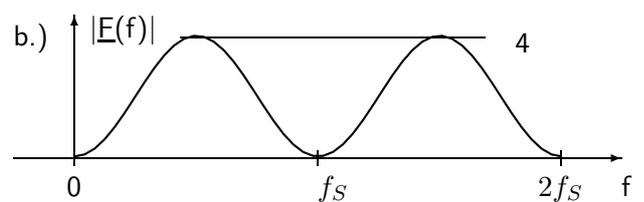
3. Aufgabe: Stabil ist ein LTI-System dann, wenn die ESA $h(t)$ bzw. $h[k]$ für $t \rightarrow \infty$ gegen einen endlichen, konstanten Wert geht [d. h. die EIA $g(t)$ bzw. $g[k]$ muss für $t \rightarrow \infty$ gegen Null gehen!].

| Teilaufgabe | gegeben ist | Endwert von $h[k]$ bzw. $h(t)$ | Endwert von $g[k]$ bzw. $g(t)$ | Stabil? |
|-------------|-------------|--------------------------------|--------------------------------|---------|
| a.) | $h(t)$ | 5; konstant, endlich | (Null) | Ja |
| b.) | $h[k]$ | Null | (Null) | Ja |
| c.) | $g(t)$ | (gegen Unendlich) | 2 | Nein |
| d.) | $g[k]$ | (konstant, endlich) | Null | Ja |
| e.) | $h(t)$ | Null | (Null) | Ja |
| f.) | $h[k]$ | 2; konstant, endlich | (Null) | Ja |
| g.) | $g(t)$ | (konstant, endlich) | Null | Ja |
| h.) | $g[k]$ | (gegen Unendlich) | 1 | Nein |

1. Aufgabe: a.) Ja, da $x[k] = 0$ für $k < 0$.
 b.) $a = 0.794\ 328$; $a^{k_b} < 10^{-3}$; $k_b \cdot \log_{10}(a) < -3$; $k_b \geq 30$ [ganzzahlig, aufrunden].
 c.) $a^k = e^{-kT_S/\tau}$; $k \cdot \ln(a) = -k \cdot T_S/\tau$; $\tau/T_S = \frac{-1}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(1/a)} = 4.343$.
 d.) Nach Nr. 6 auf Seite 109 des Skriptums gilt: $\underline{X}(z^{-1}) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{1}{1-0.794\ 328 \cdot z^{-1}}$.

2. Aufgabe: a.) $\underline{G}(z^{-1}) = \frac{A}{E} = \frac{0.4 \cdot z^{-1}}{1-1.9 \cdot z^{-1}+0.9 \cdot z^{-2}} = \frac{4 \cdot 0.1 \cdot z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0.9 \cdot z^{-1})}$
 b.) Nach Seite 109, Nr. 8 gilt für die ansteigende e- Funktion mit dem Endwert 1 :
 $\underline{F}(z^{-1}) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-a \cdot z^{-1}} = \frac{(1-a) \cdot z^{-1}}{1-(1+a) \cdot z^{-1}+a \cdot z^{-2}}$
 Koeffizientenvergleiche: Nenner: $a = 0.9$; Zähler: $(1-a) = 0.1$, deshalb besitzt die gegebene Funktion die Konstante $K = 4$ und die Folge nähert sich asymptotisch dem Endwert 4; $\tau/T_S = 9.491$.

3. Aufgabe: a.)  c.) 
 Fensterbreite $N=5$
 b.) $\underline{W}(j\omega) = e^{-j2\omega T_S} \cdot [1 + 0.5 \cdot e^{+j\omega T_S} + 0.5 \cdot e^{-j\omega T_S}] = e^{-j2\omega T_S} \cdot [1 + \cos(\omega T_S)]$
 $\underline{W}(z^{-1}) = z^{-2} \cdot [1 + 0.5 \cdot z^{+1} + 0.5 \cdot z^{-1}] = 0.5 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + 0.5 \cdot z^{-3}$
 d.) $|\underline{W}(0)| \hat{=} | \sum w[k] | = | 0.5 + 1 + 0.5 | = 2$
 e.) Tiefpassverhalten, da $|\underline{W}(f)|$ für $0 \leq f \leq f_S/2$ von 2 auf 0 abnimmt.

4. Aufgabe: a.) Analog zur 3. Aufgabe.  b.) 
 b.) Betrag: $|\underline{F}(f)| = 2 \cdot [1 - \cos(\omega T_S)]$; Winkel: $\varphi = -2\omega T_S = -2 \cdot 2\pi \cdot f/f_S = -720^\circ \cdot f/f_S$
 c.) $|\underline{F}(0)| \hat{=} | \sum f[k] | = | -0.5 + 1 - 0.5 | = 0$
 d.) Hochpassverhalten, da $|\underline{F}(f)|$ für $0 \leq f \leq f_S/2$ von 0 auf 4 zunimmt.
 e.) $\underline{F}(z^{-1}) = -z^{-1} + 2 \cdot z^{-2} - z^{-3} = \underline{G}(z^{-1}) = \frac{A}{E}$; $a[k] = -e[k-1] + 2 \cdot e[k-2] - e[k-3]$

5. Aufgabe: a.) Ja, da der (einzige) Pol bei $z = -0.5$ innerhalb des Einheitskreises liegt.
 b.) $\underline{G}(z) = \frac{2z}{z+0.5}$ c.) $\underline{G}(z^{-1}) = \frac{A}{E} = \frac{2}{1+0.5z^{-1}}$; $a[k] + 0.5 \cdot a[k-1] = 2e[k]$
 c.) Seite 109, Nr. 6 ($K=2, a=-0.5$) : $g[k] = 2 \cdot (-0.5)^k \cdot \sigma[k]$; $g[k] = \{ 2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \}$
 d.) Ja, da $g[k] = 0$ für $k < 0$. e.) $\underline{A}(z) = \underline{E}(z) \cdot \underline{G}(z) = \frac{10z}{z-1} \cdot \frac{2z}{z+0.5}$
 $\frac{\underline{A}(z)}{z} = \frac{20z}{(z-1)(z+0.5)} = \frac{r_1}{z-1} + \frac{r_2}{z+0.5}$ mit $r_1 = \frac{40}{3}$; $r_2 = \frac{20}{3}$. $\underline{A}(z) = \frac{40}{3} \cdot \frac{z}{z-1} + \frac{20}{3} \cdot \frac{z}{z+0.5}$
 Die Rücktransformation liefert nach der Tabelle auf Seite 109 mit Nr. 2 [Konstante = $40/3$] und mit Nr. 6 [Konstante = $20/3, a = -0.5$] $a[k] = [\frac{40}{3} + \frac{20}{3}(-0.5)^k] \cdot \sigma[k] = \{ 20, 10, 15, 12.5, \dots \}$.

1. Aufgabe: a.) $\underline{G}(z^{-1}) = \frac{Y}{X} = \frac{3z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4}}{1 + z^{-2}}$; $\underline{G}(z) = \frac{Y}{X} = \frac{3z^2 + 2z + 1}{z^4 + z^2}$

b.) $\underline{G}(z) = \frac{Y}{X} = 3 \cdot \frac{(z - [-1/3 + j\sqrt{2}/3])(z - [-1/3 - j\sqrt{2}/3])}{z^2(z - [j])(z - [-j])}$; $Q = 3$; Nullstellen: $z_{0,3,4} \rightarrow \infty$

c.) Aus $\underline{G}(z^{-1})$: $3z^{-2} + 2z^{-3} + 1z^{-4} : 1 + 0z^{-1} + 1z^{-2} = 3z^{-2} + 2z^{-3} - 2z^{-4} - 2z^{-5} - \dots$

Gleiches Ergebnis aus $\underline{G}(z)$: $3z^2 + 2z + 1 : z^4 + 0z^3 + z^2 = 3z^{-2} + 2z^{-3} - 2z^{-4} - 2z^{-5} - \dots$

Folge am Ausgang: $a[0] = 0$; $a[1] = 0$; $a[2] = 3$; $a[3] = 2$; $a[4] = -2$.

d.) Stabil? Nein. Grenzstabil, da 2 Pole bei $z = \pm j$ auf dem Rand des Einheitskreises liegen.

Kausal? Ja, da die EIA mit $3z^{-2}$ beginnt (siehe b.).

Struktur? IIR, da in der DIFFGL auch das Ausgangssignal der Vergangenheit auftritt bzw. nicht alle Polstellen im Ursprung der z-Ebene liegen. e.) Siehe die folgende Tabelle.

| k | x[k] | x[k-1] | x[k-2] | x[k-3] | x[k-4] | y[k] | y[k-1] | y[k-2] |
|---|------|--------|--------|--------|--------|---|--------|--------|
| 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 0$ | 0 | 0 |
| 1 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 0$ | 0 | 0 |
| 2 | 4 | 3 | 2 | 0 | 0 | $3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 6$ | 0 | 0 |
| 3 | 5 | 4 | 3 | 2 | 0 | $3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 13$ | 6 | 0 |
| 4 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | $3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 6 = 14$ | 13 | 6 |
| 5 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | $3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 13 = 13$ | 14 | 13 |

f.) $x[k] = (2 + k) \cdot \sigma[k]$; $\underline{X}(z) = \frac{2z}{z-1} + \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{2z^2 - z}{(z-1)^2}$; $\underline{Y}(z) = \underline{X}(z) \cdot \underline{G}(z) = \frac{z(2z-1) \cdot (3z^2 + 2z + 1)}{(z-1)^2 \cdot z^2 \cdot (z^2 + 1)}$;

g.) $\frac{Y(z)}{z} = \frac{(2z-1) \cdot (3z^2 + 2z + 1)}{z^2 \cdot (z-1)^2 \cdot (z^2 + 1)} = \frac{r_{1,1}}{z^1} + \frac{r_{1,2}}{z^2} + \frac{r_{2,1}}{(z-1)^1} + \frac{r_{2,2}}{(z-1)^2} + \frac{r_3}{z-j} + \frac{r_3^*}{z+j}$ (Siehe Seiten 122 und 123).

2. Aufgabe: a.) Hier Tabelle statt Bild:

| k | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------|----|----|---|---|---|----|---|---|---|---|---|---|----|
| x[k] | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| g[k] | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

b.) $y[k] = \sum_{i=-\infty}^k x[i] \cdot g[k-i] \Rightarrow y[k] = \sum_{i=1,3,5} x[i] \cdot g[k-i]$, da hier $x[i] \neq 0$ nur für $i=1, 3, 5$.

$y[k] = e[1] \cdot g[k-1] + e[3] \cdot g[k-3] + e[5] \cdot g[k-5] = 1 \cdot g[k-1] - 1 \cdot g[k-3] + 1 \cdot g[k-5]$

| k | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------------|----|----|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| g[k] | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| g[k-1] | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| g[k-3] | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| g[k-5] | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| e[1] · g[k-1] | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| e[3] · g[k-3] | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | -6 | -7 |
| e[5] · g[k-5] | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y[k] | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

3. Aufgabe: a.) $\underline{G}(s) = \frac{R+sL_2}{R+s(L_1+L_2)} = \frac{R(1+sL_2/R)}{R(1+s[L_1+L_2]/R)} = \frac{1+s/\omega_{g0}}{1+s/\omega_{g\infty}}$

b.) $|\underline{G}(\omega = 0)| = 1$; $|\underline{G}(\omega \rightarrow \infty)| = 0.1$; $f_{g0} = 10 \text{ kHz}$; $f_{g\infty} = 1 \text{ kHz}$

c.) $\underline{G}(z^{-1}) = \frac{1 + \frac{2}{T_S} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \cdot \frac{1}{\omega_{g0}}}{1 + \frac{2}{T_S} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \cdot \frac{1}{\omega_{g\infty}}} = \frac{0.127413 - 0.066495z^{-1}}{1 - 0.939082z^{-1}}$ Dabei wurde verwendet $T_S = \frac{1}{f_S} = 10^{-5} \text{ sec}$

d.) $|\underline{G}(x = 0, z^{-1} = 1)| = \frac{0.127413 - 0.066495}{1 - 0.939082} = 1$; $|\underline{G}(x \rightarrow 0.5, z^{-1} = -1)| = \frac{0.127413 + 0.066495}{1 + 0.939082} = 0.1$.

Aus der Frequenz $f_{g0} = 10 \text{ kHz}$ wird $\tilde{f}_{g0} = \frac{10^5 \text{ Hz}}{\pi} \cdot \arctan(\pi \cdot \frac{10^4 \text{ Hz}}{10^5 \text{ Hz}}) = 9689.22 \text{ Hz}$ und

aus der Frequenz $f_{g\infty} = 1 \text{ kHz}$ wird $\tilde{f}_{g\infty} = \frac{10^5 \text{ Hz}}{\pi} \cdot \arctan(\pi \cdot \frac{10^3 \text{ Hz}}{10^5 \text{ Hz}}) = 999.67 \text{ Hz}$.

Als Folge der Bilinear-Transformation (durch die dort ausgeführte nichtlineare 'Kompression' der Frequenzachse) verschieben sich die beiden Eckfrequenzen des zeitdiskreten Systems zu kleineren Werten hin.

1. Aufgabe: a.) Damit bei der Frequenz $f = 0.35 \cdot f_S = 50 \text{ Hz}$ die Verstärkung Null wird (d.h. ein Dämpfungspol auftritt) muss ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar auf dem Rand des Einheitskreises mit $|z_0| = 1$ unter dem Winkel $\varphi_{z_0} = \pm 180^\circ \cdot \frac{0.35}{0.5} = \pm 126^\circ$ vorgesehen werden. Die erforderliche Abtastfrequenz berechnet man wie folgt: $f_S = \frac{50 \text{ Hz}}{0.35} = \frac{50 \text{ Hz} \cdot 20}{7} = 142.587 \text{ Hz}$.

b.) Das konjugiert komplexe Polpaar muss im Einheitskreis liegen und wird als Startwert z.B. bei $|z_\infty| = 0.8$ unter dem Winkel $\varphi_{z_\infty} = \pm 180^\circ \cdot \frac{0.10}{0.5} = \pm 36^\circ$ d.h. an der Grenze des DB platziert.

c.) Durch gezieltes Verändern von Betrag und Winkel der Polstellen findet man mit $|z_\infty| = 0.718$ und dem Winkel $\varphi_{z_\infty} = \pm 34.025^\circ$ eine Lösung, die alle Vorgaben im DB und SB erfüllt. Da zunächst die Maximalverstärkung den Wert 10.949 84 hat, muss für die Nennerkonstante dieser Wert eingegeben werden.

d.) In der Summenform kann man nun die Übertragungs-Funktion $\underline{G}_d(1/z)$ ablesen und man erhält

$$\underline{G}_d(z^{-1}) = \frac{1 + 1.175\,571z^{-1} + z^{-2}}{10.949\,84 - 13.035\,76z^{-1} + 5.644\,905z^{-2}}$$

e.) Alle Koeffizienten sind dazu durch den Wert 10.949 84 zu dividieren.

$$\underline{G}_f(z^{-1}) = \frac{0.091\,3255 + 0.107\,360z^{-1} + 0.091\,3255z^{-2}}{1 - 1.190\,498z^{-1} + 0.515\,524z^{-2}}$$

f.) Beim Quantisieren mit 8 Bit (incl. VZ) werden die Vorgaben gerade noch eingehalten und die zugehörige Übertragungs-Funktion $\underline{G}_e(1/z)$ lautet

$$\underline{G}_e(z^{-1}) = \frac{0.093\,75 + 0.109\,375z^{-1} + 0.093\,75z^{-2}}{1 - 1.187\,5z^{-1} + 0.515\,625z^{-2}}$$

g.) Die zunächst auftretende Übersteuerung kann durch eine Abschwächung mit $v=0.5$ verhindert werden. Vor dem Eingang der IIR-Anordnung auf Seite 117 (mit den Koeffizienten von $\underline{G}_f(1/z)$) ist ein Block mit einer Verstärkung 0.5 und zum Ausgleich dafür am Ausgang ein Block mit der Verstärkung 2 vorzusehen.

h.) Der Tabelle entnimmt man, dass für $f/f_S = 0.33 \dots 0.37$ die geforderte Dämpfung eingehalten wird; daraus folgt, dass Schwankungen der Netzfrequenz im Bereich von etwa 47.14 Hz bis 52.86 Hz zulässig sind. Wenn man die Abtastfrequenz dagegen mit einer PLL (Frequenz mit Faktor 20 multiplizieren) und einem Frequenzteiler (durch 7) gemäß $f_S = f_{\text{Netz}} \cdot 20/7$ direkt aus der Netzfrequenz ableitet, ist sicher gestellt, dass der Dämpfungspol immer bei der aktuellen Netzfrequenz auftritt.

2. Aufgabe: Da die technische Frequenz $f = 0.5 \cdot f_S$ dem Wert $z=-1$ und damit dem Winkel 180° entspricht, liegen die Frequenzen des DB zwischen 0° und 72° und die des SB zwischen 108° und 180° auf dem Rand des Einheitskreises.

Butterworth- oder Potenzfilter:

| n | a(0)/dB | v(0) | DB wellig | SB wellig | t _h /ms | h _∞ | h _{max} | $\frac{\tau_{gr,0}}{T_S}$ | $\frac{\tau_{gr,max}}{T_S}$ | LZV |
|---|---------|------|-----------|-----------|--------------------|----------------|------------------|---------------------------|-----------------------------|-----|
| 9 | 0 | 1 | nein | nein | 3 | 1 | 1.2 | 4.0 | 11.2 | 2.8 |

Tschebyscheff Typ 1- Filter:

| n | a(0)/dB | v(0) | DB wellig | SB wellig | t _h /ms | h _∞ | h _{max} | $\frac{\tau_{gr,0}}{T_S}$ | $\frac{\tau_{gr,max}}{T_S}$ | LZV |
|---|---------|------|-----------|-----------|--------------------|----------------|------------------|---------------------------|-----------------------------|-----|
| 5 | 0 | 1 | ja | nein | 10 | 1 | 1.05 | 5.8 | 26.7 | 4.6 |

Tschebyscheff Typ 2- Filter:

| n | a(0)/dB | v(0) | DB wellig | SB wellig | t _h /ms | h _∞ | h _{max} | $\frac{\tau_{gr,0}}{T_S}$ | $\frac{\tau_{gr,max}}{T_S}$ | LZV |
|---|---------|------|-----------|-----------|--------------------|----------------|------------------|---------------------------|-----------------------------|-----|
| 5 | 0 | 1 | nein | ja | 2 | 1 | 1.16 | 2.0 | 5.8 | 2.9 |

Elliptic Function- oder Cauer-Filter:

| n | a(0)/dB | v(0) | DB wellig | SB wellig | t _h /ms | h _∞ | h _{max} | $\frac{\tau_{gr,0}}{T_S}$ | $\frac{\tau_{gr,max}}{T_S}$ | LZV |
|---|---------|-------|-----------|-----------|--------------------|----------------|------------------|---------------------------|-----------------------------|----------|
| 4 | 5 | 0.562 | ja | ja | 9 | 0.562 | 0.83 | 1.1 | 21.5 | 19.5 (!) |