

Ü 01 : a.) Bezugsgrößen: $C_B = \frac{1}{2\pi f_B R_B} = 318.31 \text{ pF}$; $L_B = \frac{R_B}{2\pi f_B} = 795.77 \text{ nH}$

Normierte Werte: $r = \frac{R}{R_B} = 1$; $c = \frac{C}{C_B} = 0.83268$; $l = \frac{L}{L_B} = 1.6654$

b.) Neue Bezugsgrößen: $L_B = \frac{L}{l} = \frac{50 \text{ mH}}{1.6654} = 30.023 \text{ mH}$; $R_B = 2\pi f_B L_B = 188.64 \text{ } \Omega$;

$C_B = \frac{1}{2\pi f_B R_B} = 843.70 \text{ nF}$

Technische Werte: $R = r \cdot R_B = 188.64 \text{ } \Omega$; $C = c \cdot C_B = 702.53 \text{ nF}$; $L = l \cdot L_B = 50 \text{ mH}$

Ü 02:

Mit $\tilde{t} = t/T_B \Rightarrow t = \tilde{t} \cdot T_B$ erhält man $u(\tilde{t}) = 2 \cdot (1 - e^{-\tilde{t}/5}) + 1 \cdot (1 - e^{-\tilde{t}/2.5})$.

Mit der normierten Zeit $\tilde{t} = t \cdot \omega_B \Rightarrow t = \tilde{t}/\omega_B$ erhält man als normierte Stromzeitfunktion

$i(\tilde{t}) = 2 \cdot \sin(0.5 \cdot \tilde{t}) + 1 \cdot \cos(\tilde{t}) - 0.5 \cdot \sin(1.5 \cdot \tilde{t} + 45^\circ)$.

Ü 03 :

Mit $t = \tilde{t} \cdot T_B \Rightarrow \tilde{t} = t/T_B$ erhält man $u(t) = 750 \text{ V} \cdot e^{-t/2.5 \text{ msec}} \cdot \sin(\frac{1000 \cdot t}{\text{sec}})$.

Ü 04 : Gerader Anteil: $f_g(x) = 0.5 \cdot [f(x) + f(-x)]$ Ungerader Anteil: $f_u(x) = 0.5 \cdot [f(x) - f(-x)]$

In den Bildern unten waagrecht schraffiert

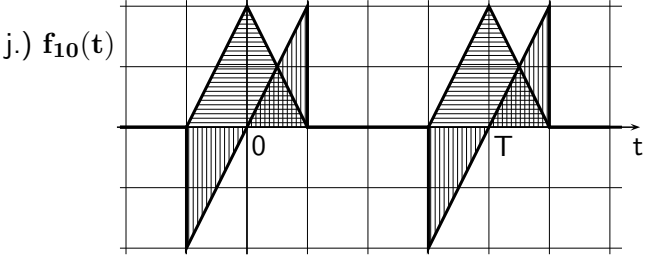
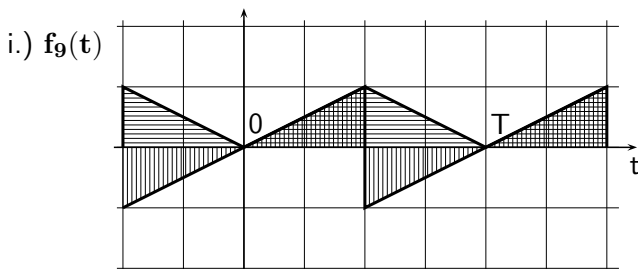
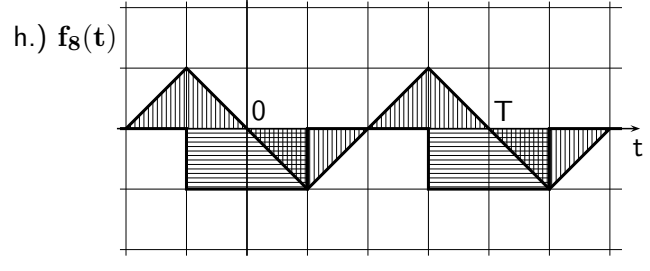
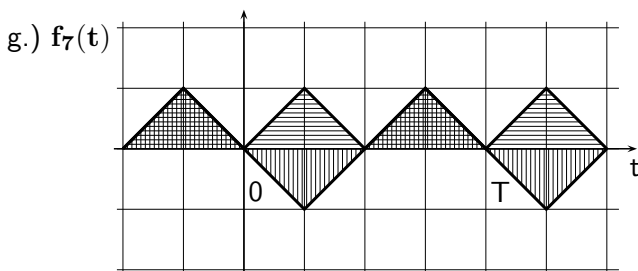
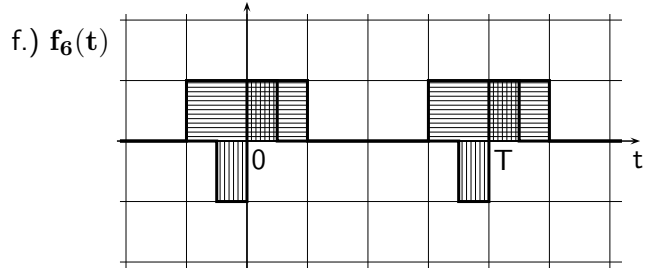
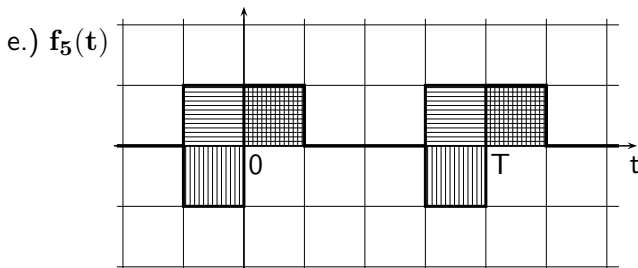
In den Bildern unten senkrecht schraffiert

a.) $f_{1g}(x) = 2 - \frac{x^2}{4} + x^4$; $f_{1u}(x) = x + \frac{x^3}{2}$ (Trennen der Potenzen)

b.) $f_{2g}(x) = 1 - \cos(2x)$; $f_{2u}(x) = 0$ (Trennen der Anteile)

c.) $f_{3g}(x) = 0$; $f_{3u}(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ (ungerade · gerade = ungerade)

d.) $f_{4g}(x) = 4x^2 - 2$; $f_{4u}(x) = 0$ (Tschebyscheff- Polynom)



Ü 05:

- a.) $f_1 = 81 \text{ Hz} = 3 \cdot 27 \text{ Hz}; f_2 = 108 \text{ Hz} = 4 \cdot 27 \text{ Hz}; f_1/f_2 = 3/4$ teilerfremd
 $T = 3/81 \text{ Hz} = 4/108 \text{ Hz} = 1/27 \text{ Hz} = 37.037 \text{ msec}$
- b.) $f_1 = 16 \text{ Hz} = 16 \text{ Hz}; f_2 = 17 \text{ Hz}; f_1/f_2 = 16/17$ teilerfremd
 $T = 16/16 \text{ Hz} = 17/17 \text{ Hz} = 1 \text{ sec}$
- c.) $f_1 = 19.5 \text{ Hz}; f_2 = 28.5 \text{ Hz}; f_3 = 34.5 \text{ Hz}; f_4 = 70.5 \text{ Hz};$
 $f_1 = 13 \cdot 1.5 \text{ Hz}; f_2 = 19 \cdot 1.5 \text{ Hz}; f_3 = 23 \cdot 1.5 \text{ Hz}; f_4 = 47 \cdot 1.5 \text{ Hz}; T = \frac{1}{1.5} \text{ Hz} = \frac{2}{3} \text{ sec}$
- d.) $f_1 = 18 \text{ Hz}; f_2 = 24 \text{ Hz}; f_3 = \frac{60}{\pi} \text{ Hz};$
 Da $\frac{1}{\pi}$ irrational ist, gibt es keine endliche Periodendauer!
- e.) $\omega_1 = 1000 \frac{1}{\text{sec}}; \omega_2 = 100 \pi \frac{1}{\text{sec}}; \omega_3 = \sqrt{2} \pi 100 \frac{1}{\text{sec}}$
 Da π und $\sqrt{2}$ irrationale Zahlen sind, gibt es auch hier keine endliche Periodendauer!

Ü 06: a.) Aus $u(t) = a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) = A \cdot \sin(x + \varphi)$ erhält man mit der Beziehung
 $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$ für $\alpha = x; \beta = \varphi$

$A \cdot \sin(x + \varphi) = A[\sin(x) \cdot \cos(\varphi) + \cos(x) \cdot \sin(\varphi)] = a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)$ und daraus

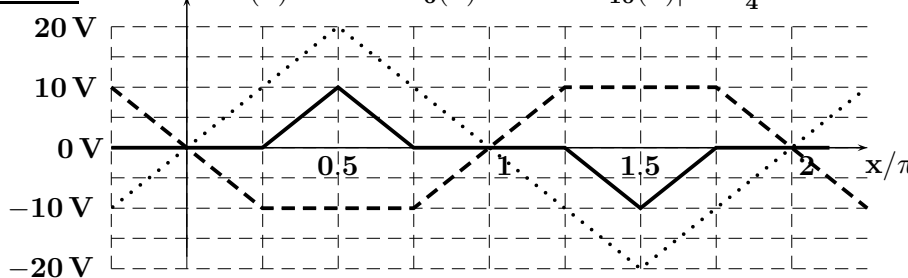
$a = A \cdot \sin(\varphi); b = A \cdot \cos(\varphi)$	$\frac{a}{b} = \tan(\varphi)$	$A = \sqrt{a^2 + b^2}; \varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$
--	-------------------------------	---

Achtung: Der Winkel φ muss immer dann um $\pm 180^\circ$ korrigiert werden, wenn $b < 0$!

b.) $a = -3 \text{ V}; b = -4 \text{ V}; A_b = \sqrt{9 + 16} \text{ V} = 5 \text{ V}; \varphi_b = \arctan\left(\frac{-3}{-4}\right) - 180^\circ = -143.13^\circ$

c.) $a_c = 10 \text{ A} \cdot \sin(-60^\circ) = -8.6603 \text{ A}; b_c = 10 \text{ A} \cdot \cos(-60^\circ) = 5 \text{ A}$

Ü 07: $u(x) = 20 \text{ V} \cdot f_6(x) - 10 \text{ V} \cdot f_{10}(x) | \alpha = \frac{\pi}{4}$ Siehe Seite 16.

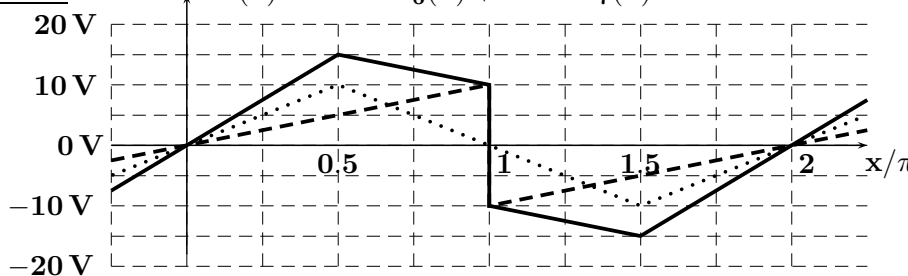


Symmetrien:
 Beide Teilfunktionen und damit auch $u(x)$ sind ungerade Funktionen mit ungerader Halbperioden-Symmetrie

$$u(x) = 20 \text{ V} \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot [\sin(x) - + \dots] - 10 \text{ V} \cdot \frac{4^2}{\pi^2} \cdot [\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin(x) + \dots] = \frac{160 \text{ V}}{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sin(x) + \dots$$

$A_1 = 4.7482 \text{ V}$

Ü 08: $u(x) = 10 \text{ V} \cdot f_6(x) + 10 \text{ V} \cdot f_7(x)$ Siehe Seite 16.

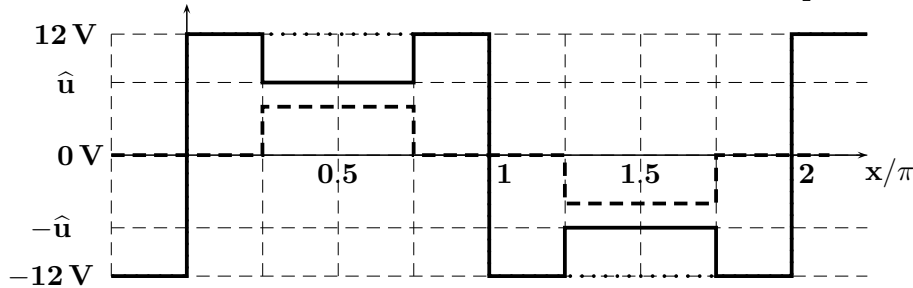


Symmetrien:
 Die Teilfunktionen und die Gesamtfunktion $u(x)$ sind ungerade (punktsymmetrisch) und enthalten deshalb nur sinus-Anteile.

$$u(x) = 10 \text{ V} \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot \left[\dots - \frac{\sin(3x)}{3^2} + \dots \right] + 10 \text{ V} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left[\dots + \frac{\sin(3x)}{3} + \dots \right] = \left[\frac{-80 \text{ V}}{3^2 \pi^2} + \frac{20 \text{ V}}{3\pi} \right] \cdot \sin(3x) + \dots$$

$A_3 = (-0.90063 + 2.12207) \text{ V} = 1.22143 \text{ V}$

Ü 09: $u(x) = 12 \text{ V} \cdot f_1(x) - (12 \text{ V} - \hat{u}) \cdot f_3(x) | \alpha = \frac{\pi}{4}$ Siehe Seite 16.



$$U_{1\text{eff}} = \left[12 \text{ V} \frac{4}{\pi} - (12 \text{ V} - \hat{u}) \frac{4}{\pi\sqrt{2}} \right] / \sqrt{2} = 7.7480 \text{ V} \implies \hat{u} = 7.2000 \text{ V}$$

Ü 10: a.)

$$a_0 = \frac{x_2 - x_1}{2\pi} \text{ V}$$

$$a_n = \frac{\sin(n \cdot x_2) - \sin(n \cdot x_1)}{n \cdot \pi} \text{ V}; \quad b_n = \frac{\cos(n \cdot x_1) - \cos(n \cdot x_2)}{n \cdot \pi} \text{ V}$$

$$A_0 = a_0; \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{2 \text{ V}}{n\pi} \cdot \left| \sin \frac{n(x_2 - x_1)}{2} \right|$$

Zur Lösung kommt man durch Quadrieren und Umformen mit den Gleichungen $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$, $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ und $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\alpha)]$

b.)

$$x_1 = 0; \quad x_2 = e \cdot 2 \cdot \pi$$

$$a_0 = \frac{x_2 - x_1}{2\pi} \text{ V} = 1 \text{ V} \cdot e$$

$$a_n = 1 \text{ V} \cdot \frac{\sin(n \cdot e \cdot 2\pi)}{n \cdot \pi}; \quad b_n = 1 \text{ V} \cdot \frac{1 - \cos(n \cdot e \cdot 2\pi)}{n \cdot \pi}$$

$$A_0 = a_0 = 1 \text{ V} \cdot e; \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2 \text{ V} \cdot \left| \frac{\sin(n \cdot e \cdot \pi)}{n \cdot \pi} \right| = 2 \text{ V} \cdot e \cdot |\text{si}(n \cdot e \cdot \pi)|$$

Die Berechnung von A_n verläuft analog zur Teilaufgabe a.) mit $\text{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

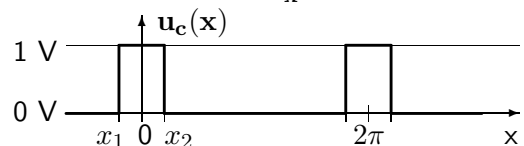
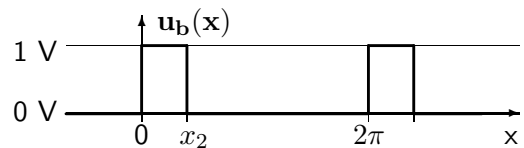
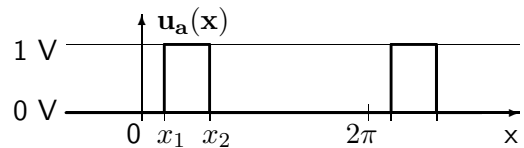
c.)

$$x_1 = -e \cdot \pi; \quad x_2 = +e \cdot \pi$$

$$a_0 = \frac{x_2 - x_1}{2\pi} = 1 \text{ V} \cdot e$$

$$a_n = 1 \text{ V} \cdot \frac{\sin(n \cdot e \cdot \pi) - \sin(-n \cdot e \cdot \pi)}{n \cdot \pi} = 2 \text{ V} \cdot \frac{\sin(n \cdot e \cdot \pi)}{n \cdot \pi} = 2 \text{ V} \cdot e \cdot \text{si}(n \cdot e \cdot \pi); \quad b_n = 0 \text{ V}$$

$$A_0 = a_0 = 1 \text{ V} \cdot e; \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n| = 2 \text{ V} \cdot e \cdot |\text{si}(n \cdot e \cdot \pi)|$$



Ü 11:

$$a.) \quad \underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{u} \cdot e^{-\alpha t} \cdot e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{\hat{u}}{T} \int_0^T e^{-(\alpha + jn\omega_1)t} dt$$

$$\underline{c}_n = \frac{\hat{u}}{T} \cdot \frac{e^{-(\alpha + jn\omega_1)t}}{-(\alpha + jn\omega_1)} \Big|_{t=0}^{t=T} = \frac{\hat{u}}{-(\alpha + jn\omega_1)T} \cdot [e^{-(\alpha + jn\omega_1)T} - 1]$$

$$\text{Mit } \omega_1 T = 2\pi \text{ wird daraus } \underline{c}_n = \frac{\hat{u}}{-\alpha T - jn2\pi} \cdot [e^{-\alpha T} \cdot \underbrace{e^{-jn2\pi}}_{=1} - 1] = \frac{\hat{u} \cdot (1 - e^{-\alpha T})}{\alpha T + jn2\pi}$$

$$\text{und mit } \alpha = \frac{2}{T} \text{ findet man } \underline{c}_n = \frac{\hat{u} \cdot (1 - e^{-2})}{2 + jn2\pi} \text{ und für } n=0 \text{ folgt } \underline{c}_0 = \frac{\hat{u} \cdot (1 - e^{-2})}{2}$$

$$b.) \quad \underline{c}_1 = \frac{\hat{u} \cdot (1 - e^{-2})}{2(1 + j\pi)} = \frac{\hat{u} \cdot (1 - e^{-2})(1 - j\pi)}{2(1 + \pi^2)} = \hat{u} \cdot 0.039774 \cdot (1 - j\pi) = (0.039774 - j0.124955) \cdot \hat{u}$$

$$A_1 = 2 \cdot |\underline{c}_1| = 0.262265 \cdot \hat{u}; \quad \varphi_n = \Phi_n + 90^\circ = \arctan \frac{\text{Im}[\underline{c}_1]}{\text{Re}[\underline{c}_1]} + 90^\circ = -72.343^\circ + 90^\circ = 17.657^\circ$$

Ü 12:

a.) Die Funktion $i(t)$ ist punktsymmetrisch (ungerade) und besitzt eine ungerade Halbperiodensymmetrie. Deshalb entfallen alle geraden Anteile $a_0 = a_n = 0$ und es können nur ungerade Vielfache $n = 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ der Grundfrequenz auftreten.

Die Integration wird nur über $0 \leq t \leq T/4$ durchgeführt.

$$b_n = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} i(t) \cdot \sin(n\omega_1 t) dt \quad \text{mit} \quad i(t) = \begin{cases} \frac{5A}{T/6} \cdot t & : 0 \leq t < T/6 \\ 5A & : T/6 \leq t < T/4 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{8}{T} \int_0^{T/6} \frac{5A}{T/6} \cdot t \cdot \sin(n\omega_1 t) dt + \frac{8}{T} \int_{T/6}^{T/4} 5A \cdot \sin(n\omega_1 t) dt \quad (\text{Aufspaltung in zwei Integrale})$$

$$\text{Berechnung mit} \quad \int x \cdot \sin(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cdot \cos(ax)}{a} \quad \text{und} \quad \int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$$

$$b_n = \frac{240}{T^2} A \left[\frac{\sin(n\omega_1 t)}{n^2 \omega_1^2} - \frac{t \cdot \cos(n\omega_1 t)}{n\omega_1} \right]_0^{T/6} + \frac{40}{T} A \left[-\frac{\cos(n\omega_1 t)}{n\omega_1} \right]_{T/6}^{T/4} = \frac{240}{(2\pi n)^2} A \cdot \sin \frac{n\pi}{3};$$

$$b_{2k+1} = \frac{60}{\pi^2 (2k+1)^2} A \cdot \sin(2k+1) \frac{\pi}{3}; \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{30 \cdot \sqrt{3}}{\pi^2 n^2} A & : n = 1, 7, 13, \dots \\ -\frac{30 \cdot \sqrt{3}}{\pi^2 n^2} A & : n = 5, 11, 17, \dots \\ 0 A & : \text{sonst} \end{cases}$$

Mit diesen Fourier-Koeffizienten erhält man die Fourier-Reihe für den Strom

$$i(t) = \frac{30 \cdot \sqrt{3}}{\pi^2} A \cdot [\sin(\omega_1 t) - \frac{1}{5^2} \sin(5\omega_1 t) + \frac{1}{7^2} \sin(7\omega_1 t) - + \dots]$$

Alternativer Weg zur Berechnung der Fourier-Reihe mit der Fourier-Reihe $f_2(x = \omega_1 t) |_{\alpha = \frac{\pi}{3}}$ auf Seite 16. Man betrachtet nun die Ableitung des Stroms und integriert die zugehörige Fourier-Reihe:

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{5A}{T/6} \cdot f_2 = \frac{30A}{T} \cdot \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin(\alpha) \cos(\omega_1 t)}{1} + \frac{\sin(3\alpha) \cos(3\omega_1 t)}{3} + \frac{\sin(5\alpha) \cos(5\omega_1 t)}{5} + \dots \right]$$

$$i(t) = \int \frac{di(t)}{dt} dt = \frac{120A}{\pi T} \cdot \int \left[\frac{\sin(\alpha) \cos(\omega_1 t)}{1} + \frac{\sin(3\alpha) \cos(3\omega_1 t)}{3} + \frac{\sin(5\alpha) \cos(5\omega_1 t)}{5} + \dots \right] dt$$

$$i(t) = \frac{120A}{\pi T} \cdot \left[\frac{\sin(\frac{\pi}{3}) \sin(\omega_1 t)}{1^2 \omega_1} + \frac{\sin(\frac{3\pi}{3}) \sin(3\omega_1 t)}{3^2 \omega_1} + \frac{\sin(\frac{5\pi}{3}) \sin(5\omega_1 t)}{5^2 \omega_1} + \frac{\sin(\frac{7\pi}{3}) \sin(7\omega_1 t)}{7^2 \omega_1} + \dots \right]$$

$$i(t) = \frac{30 \cdot \sqrt{3}}{\pi^2} A \cdot [\sin(\omega_1 t) - \frac{1}{5^2} \sin(5\omega_1 t) + \frac{1}{7^2} \sin(7\omega_1 t) - + \dots]$$

$$b.) \quad A_n = |b_n| = \frac{30 \cdot \sqrt{3}}{\pi^2 n^2} A \quad \text{für} \quad n = 1, 5, 7, 11, 13, 17, \dots \quad \varphi_n = \begin{cases} 0^\circ & : 1, 7, 13, \dots \\ 180^\circ & : 5, 11, 17, \dots \end{cases}$$

$$c.) \quad c_n = -j \frac{b_n}{2} = \begin{cases} -j \frac{15 \sqrt{3}}{\pi^2 n^2} A & : 1, 7, 13, \dots \\ +j \frac{15 \sqrt{3}}{\pi^2 n^2} A & : 5, 11, 17, \dots \\ 0 A & : \text{sonst} \end{cases}$$

$$d.) \quad c_0 = 0; \quad |c_n| = \frac{|b_n|}{2} = \frac{15 \sqrt{3}}{\pi^2 n^2} A \quad \text{für} \quad n = 1, 5, 7, 11, 13, 17, \dots$$

$$\Phi_n = \varphi_n - 90^\circ = \begin{cases} -90^\circ & : 1, 7, 13, \dots \\ +90^\circ & : 5, 11, 17, \dots \end{cases}$$

Ü 13: Auf Seite 16 finden Sie unter der Nummer 11 eine Funktion, die proportional zum Integral der gegebenen Funktion verläuft.

$$i(x) = 3 \text{ mA} \cdot \frac{df_{11}(x)}{dx} = 3 \text{ mA} \cdot \frac{4}{\pi} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{1 \cdot 3} - \frac{\cos(4x)}{3 \cdot 5} - \frac{\cos(6x)}{5 \cdot 7} - \frac{\cos(8x)}{7 \cdot 9} - \dots \right]$$

$$i(x) = 3 \text{ mA} \cdot \frac{4}{\pi} \left[\frac{2 \cdot \sin(2x)}{1 \cdot 3} + \frac{4 \cdot \sin(4x)}{3 \cdot 5} + \frac{6 \cdot \sin(6x)}{5 \cdot 7} + \frac{8 \cdot \sin(8x)}{7 \cdot 9} + \dots \right]$$

Da $i(x)$ ungerade ist und eine gerade Halbperiodensymmetrie besitzt, entfallen alle geraden Anteile a_0 ; a_n und zudem auch die folgenden Koeffizienten der Fourier-Reihe: b_{2k+1} für $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$b_2 = \frac{8 \text{ mA}}{\pi} = 2.5465 \text{ mA}$$

Ü 14: a.) $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4, \dots, \tilde{a}_8$
 $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{b}_4, \dots$

b.) Da $u(x)$ ungerade (punktsymmetrisch) ist und eine ungerade Halbperiodensymmetrie besitzt, entfallen alle geraden Anteile \tilde{a}_0 ; \tilde{a}_n und die folgenden Koeffizienten der Fourier-Reihe: \tilde{b}_{2k} für $k = 1, 2, 3, \dots$

c.) Die arithmetischen Mittelwerte der rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwerte (Siehe Tabelle).

d.)

i	x[i] / °	u(x[i])/V	u(x[i]) · sin(1 · x[i])/V
0	0	0	0.000000
1	22.5	12	4.592201
2	45	9.6	6.788225
3	67.5	7.2	6.651933
4	90	7.2	7.200000
5	112.5	7.2	6.651933
6	135	9.6	6.788225
7	157.5	12	4.592201
8	180	0	0.000000
9	202.5	-12	4.592201
10	225	-9.6	6.788225
11	247.5	-7.2	6.651933
12	270	-7.2	7.200000
13	292.5	-7.2	6.651933
14	315	-9.6	6.788225
15	337.5	-12	4.592201

Bildet man die Summe der Elemente der rechten Spalte erhält man den Wert 86.529436 V.

Damit lässt sich der gesuchte Fourier-Koeffizient berechnen: $\tilde{b}_1 = \frac{2}{16} \cdot 86.529436 \text{ V} = 10.816179 \text{ V}$

$$\text{Ü 15: } U_{\text{eff}} = \sqrt{\bar{U}^2 + U_{\text{eff } 1}^2 + U_{\text{eff } 2}^2 + U_{\text{eff } 3}^2} = 20 \text{ V} \sqrt{2^2 + \frac{4^2+3^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{0.3^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{0.5^2}{(\sqrt{2})^2}} = 81.658 \text{ V}$$

$$\bar{U} = 20 \text{ V} \cdot 2 = 40 \text{ V}; \quad k = \sqrt{\frac{U_{\text{eff } 2}^2 + U_{\text{eff } 3}^2}{U_{\text{eff}}^2 - \bar{U}^2}} = 11.58 \%; \quad \text{THD} = \frac{\sqrt{U_{\text{eff } 2}^2 + U_{\text{eff } 3}^2}}{U_{1 \text{ eff}}} = 11.66 \%$$

Ü 16:

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}[(6 \text{ V})^2 \cdot \frac{T}{4} + (2 \text{ V})^2 \cdot \frac{T}{4} + (4 \text{ V})^2 \cdot \frac{T}{4}] = \sqrt{9 \text{ V}^2 + 1 \text{ V}^2 + 4 \text{ V}^2} = 3.7417 \text{ V}$$

$$\bar{U} = 3 \text{ V} = \frac{1}{T}[6 \text{ V} \cdot \frac{T}{4} + 2 \text{ V} \cdot \frac{T}{4} + 4 \text{ V} \cdot \frac{T}{4}] = \frac{1}{T} \cdot 12 \text{ V} \cdot \frac{T}{4} \quad \text{Ermittlung bevorzugt ohne Rechnung!}$$

$$\delta = \frac{U_{\text{eff}}}{|\bar{u}(t)|} = \frac{\sqrt{14} \text{ V}}{3 \text{ V}} = 1.2472 ; \quad \sigma = \frac{\hat{u}}{U_{\text{eff}}} = \frac{6 \text{ V}}{\sqrt{14} \text{ V}} = 1.6036 ; \quad P = \frac{U^2}{R} = \frac{14 \text{ V}^2}{50 \Omega} = 0.28 \text{ W}$$

Ü 17: a.) Die Integration für den Effektivwert erfolgt nur über eine Viertelperiode (Symmetrie).

$$a.) \quad I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{4}{T} \left[\int_0^{T/6} \left(\frac{5 \text{ A}}{T/6} \cdot t \right)^2 dt + \int_{T/6}^{T/4} (5 \text{ A})^2 dt \right]} = 10 \text{ A} \sqrt{\frac{1}{T} \left[\int_0^{T/6} \left(\frac{t}{T/6} \right)^2 dt + \int_{T/6}^{T/4} dt \right]}$$

$$I_{\text{eff}} = 10 \text{ A} \sqrt{\frac{1}{T} \left[\frac{t^3}{3(T/6)^2} \Big|_{t=0}^{T/6} + t \Big|_{t=T/6}^{T/4} \right]} = 10 \text{ A} \sqrt{\frac{1}{T} \left[\frac{(T/6)^3}{3(T/6)^2} + \frac{T}{4} - \frac{T}{6} \right]} = 10 \text{ A} \sqrt{\frac{1}{18} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = 3.7268 \text{ A}$$

Kurzer Weg mit Seite 16: $I_{\text{eff}} = 5 \text{ A} \cdot F_{10 \text{ eff}}(\alpha = \frac{\pi}{3}) = 3.7268 \text{ A}$

Da $i(t)$ eine ungerade Funktion ist gilt $I_{\text{eff}} = I_{\sim \text{eff}}$.

b.) Die Amplitude der Grundschwingung berechnet man mit Seite 16. $\hat{i}_1 = \frac{5 \text{ A} \cdot 4}{\pi^2/3} \sin(\frac{\pi}{3}) = 5.2648 \text{ A}$

Für den zugehörigen Effektivwert erhält man $I_{1 \text{ eff}} = \frac{\hat{i}_1}{\sqrt{2}} = 3.7228 \text{ A}$ und berechnet damit den Klirrfaktor:

$$k = \sqrt{1 - \frac{I_{1 \text{ eff}}^2}{I_{\sim \text{eff}}^2}} = \sqrt{1 - \frac{(3.7228 \text{ A})^2}{(3.7268 \text{ A})^2}} = 4.63 \%$$

Ü 18: a.) Die Zeitkonstante des RC- Tiefpass- Filters beträgt $\tau = R \cdot C = 330 \mu\text{sec}$.

Für die Eck- oder auch Grenzkreisfrequenz berechnet man als Wert $\omega_g = \frac{1}{\tau} = 3030.3 \frac{1}{\text{sec}}$

und die Grundkreisfrequenz von $u_E(t)$ beträgt $\omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot f_1 = 3141.6 \frac{1}{\text{sec}}$

Aus dem frequenzabhängigen, komplexen Spannteilerverhältnis

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{U_A(j\omega)}{U_E(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_g)}$$

werden die Verstärkungen bei allen in $u_E(t)$ enthaltenen Frequenzen berechnet: $\underline{G}(j0) = 1 \cdot e^{j0^\circ}$;

$$\underline{G}(j\omega_1) = \frac{1}{1 + j(\omega_1/\omega_g)} = \frac{1}{1 + j(3141.6 \frac{1}{\text{sec}} / 3030.3 \frac{1}{\text{sec}})} = \frac{1}{1 + j1.0367} = 0.69425 \cdot e^{-j46.03^\circ} ;$$

$$\underline{G}(j3\omega_1) = \frac{1}{1 + j(3\omega_1/\omega_g)} = \frac{1}{1 + j(9424.8 \frac{1}{\text{sec}} / 3030.3 \frac{1}{\text{sec}})} = \frac{1}{1 + j3.1102} = 0.30609 \cdot e^{-j72.18^\circ} .$$

$$U_{A \text{ eff}} = \sqrt{[\bar{U} \cdot |\underline{G}(j0)|]^2 + [U_{1 \text{ eff}} \cdot |\underline{G}(j\omega_1)|]^2 + [U_{3 \text{ eff}} \cdot |\underline{G}(j3\omega_1)|]^2}$$

$$U_{A \text{ eff}} = \sqrt{[3 \text{ V} \cdot 1]^2 + [\frac{4 \text{ V}}{\sqrt{2}} \cdot 0.69425]^2 + [\frac{5 \text{ V}}{\sqrt{2}} \cdot 0.30609]^2} = \sqrt{9 \text{ V}^2 + 3.85586 \text{ V}^2 + 1.17114 \text{ V}^2}$$

Der Effektivwert am Ausgang besitzt den Wert $U_{A \text{ eff}} = 3.7453 \text{ V}$

b.) Es fließen nur die Wechselströme I_1, I_3 mit den Kreisfrequenzen $\omega_1, 3\omega_1$:

$$\hat{I}_1 = \frac{4 \text{ V}}{R + \frac{1}{j\omega_1 C}} = \frac{4 \text{ V}}{100 \Omega - j96.4575 \Omega} = 28.79 \text{ mA} \cdot e^{j43.97^\circ} ; \quad I_{1 \text{ eff}} = 20.36 \text{ mA}$$

$$\hat{I}_3 = \frac{5 \text{ V}}{R + \frac{1}{j3\omega_1 C}} = \frac{5 \text{ V}}{100 \Omega - j32.1525 \Omega} = 47.60 \text{ mA} \cdot e^{j17.82^\circ} ; \quad I_{3 \text{ eff}} = 33.66 \text{ mA}$$

$$P = [I_{1 \text{ eff}}^2 + I_{3 \text{ eff}}^2] \cdot R = [(20.36 \text{ mA})^2 + (33.66 \text{ mA})^2] \cdot 100 \Omega = 154.75 \text{ mW}$$

Berechnet man die Leistung über die Spannungen an R, ist zu berücksichtigen, dass diese gegenüber denen an C um 90° voreilen: $\hat{U}_1 = 4 \text{ V} \sqrt{1 - 0.69425^2} = 2.8785 \text{ V} ; \quad \hat{U}_3 = 5 \text{ V} \sqrt{1 - 0.30609^2} = 4.7600 \text{ V}$

Ü 19: a.) $u(t) = 10 \text{ V} \cdot \sin(\omega_1 t)$; $i(t) = \frac{8 \cdot 10^{-4} \text{ A}}{\pi^2} \left[\frac{\sin(\omega_1 t)}{1^2} - \frac{\sin(3\omega_1 t)}{3^2} + \frac{\sin(5\omega_1 t)}{5^2} - + \dots \right]$

b.) Berechnung von I_{eff} im Zeitbereich: $I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{4}{T} \int_{t=0}^{T/4} i(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{4}{40 \mu\text{s}} \int_{t=0}^{10 \mu\text{s}} \left[\frac{10^{-4} \text{ A}}{10 \mu\text{s}} \cdot t \right]^2 dt}$

$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{10 \mu\text{s}} \left[\frac{10^{-4} \text{ A}}{10 \mu\text{s}} \right]^2 \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_{t=0}^{10 \mu\text{s}}} = \sqrt{\frac{10^{-8} \text{ A}^2}{(10 \mu\text{s})^3} \cdot \frac{(10 \mu\text{s})^3}{3}} = \frac{10^{-4} \text{ A}}{\sqrt{3}} = 57.74 \mu\text{A}$; $U_{\text{eff}} = \frac{10 \text{ V}}{\sqrt{2}}$

c.) $S = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = \frac{10 \text{ V}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{10^{-4} \text{ A}}{\sqrt{3}} = \frac{1 \text{ mVA}}{\sqrt{6}} = 0.4082 \text{ mVA}$

d.) Da sowohl $u(t)$ als auch $i(t)$ ungerade Zeitfunktionen sind, sind ihre Mittelwerte gleich Null. Zur Wirkleistung trägt nur die Grundschwingung bei, da die Spannung rein sinusförmig verläuft. Zwischen Spannung und Stromgrundwelle besteht keine Phasenverschiebung $\varphi_u = \varphi_{i1} = 0^\circ$.

$P = U_{\text{eff}} \cdot I_{1\text{eff}} \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_{i1}) = \frac{10 \text{ V}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{8 \cdot 10^{-4} \text{ A}}{\pi^2 \sqrt{2}} \cdot \cos(0) = 0.4053 \text{ mW}$

e.) $Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 0.0487 \text{ mvar}$

Ü 20 : Die in der Aufgabenstellung gegebenen normierten Spannungspegel ergeben folgende Amplituden und Effektivwerte der Anteile:

a.) $U_{\text{eff}} = \sqrt{\sum_0^5 U_{n\text{eff}}^2} = \sqrt{82.8925} \text{ V} = 9.1045 \text{ V}$

b.) $U_{\sim\text{eff}} = \sqrt{\sum_1^5 U_{n\text{eff}}^2} = \sqrt{72.8925} \text{ V} = 8.5377 \text{ V}$

n	\hat{u}_n/V	$U_{n\text{eff}}/\text{V}$	$U_{n\text{eff}}^2/\text{V}^2$
0	3.1623	3.1623	10.0000
1	10.0000	7.0711	50.0000
2	5.6234	3.9764	15.8114
3	3.1623	2.2361	5.0000
4	1.7783	1.2574	1.5811
5	1.0000	0.7071	0.5000

c.) $k = \sqrt{\sum_2^5 U_{n\text{eff}}^2 / \sum_1^5 U_{n\text{eff}}^2} = \sqrt{22.8925 \text{ V}^2 / 72.8925 \text{ V}^2} = 56.04\%$

Ü 21 : a.) $i(U) = k(U - U_S)^3$; $\frac{di}{dU} = 3k(U - U_S)^2$; $\frac{d^2i}{dU^2} = 6k(U - U_S)$; $\frac{d^3i}{dU^3} = 6k$

Im Arbeitspunkt d.h. für $U = U_0$ gilt $U - U_S = U_0 - U_S = (3.7 - 0.7) \text{ V} = 3 \text{ V}$.

Ohne Wechselsignal fließt dann der Gleichstrom $i(U_0) = 10 \frac{\text{mA}}{\sqrt{3}} \cdot (3 \text{ V})^3 = 270 \text{ mA}$.

Für die Taylor-Reihe werden die folgenden Ableitungen im Arbeitspunkt benötigt :

$\frac{di}{dU} \Big|_{U_0} = 3 \cdot 10 \frac{\text{mA}}{\sqrt{3}} \cdot 9 \text{ V}^2 = 270 \frac{\text{mA}}{\text{V}}$; $\frac{d^2i}{dU^2} \Big|_{U_0} = 6 \cdot 10 \frac{\text{mA}}{\sqrt{3}} \cdot 3 \text{ V} = 180 \frac{\text{mA}}{\text{V}^2}$

$\frac{d^3i}{dU^3} \Big|_{U_0} = 6 \cdot 10 \frac{\text{mA}}{\sqrt{3}} = 60 \frac{\text{mA}}{\text{V}^3}$

Taylor-Reihe des Stroms für $U = U_0 + u(t)$:

$i(U_0 + u(t)) = i(U_0) + \frac{di}{dU} \Big|_{U_0} \cdot \frac{u(t)}{1!} + \frac{d^2i}{dU^2} \Big|_{U_0} \cdot \frac{u(t)^2}{2!} + \frac{d^3i}{dU^3} \Big|_{U_0} \cdot \frac{u(t)^3}{3!} + \dots$

$i(U_0 + u(t)) = 270 \text{ mA} + 270 \text{ mA} \cdot \frac{u(t)}{\text{V}} + 90 \text{ mA} \cdot \frac{u(t)^2}{\text{V}^2} + 10 \text{ mA} \cdot \frac{u(t)^3}{\text{V}^3} + \dots$

b.) Potenziert man die Wechselspannung, erhält man $u(t) = 0.5 \text{ V} \cdot \sin(\omega_1 t)$,

$u(t)^2 = 0.125 \text{ V}^2 \cdot [1 - \cos(2\omega_1 t)]$ und $u(t)^3 = 0.03125 \text{ V}^3 \cdot [3\sin(\omega_1 t) - \sin(3\omega_1 t)]$.

Fasst man gleichfrequente Anteile zusammen, erhält man als Zeitfunktion des Stromes

$i(t) = 281.25 \text{ mA} + 135.9375 \text{ mA} \cdot \sin(\omega_1 t) - 11.25 \text{ mA} \cdot \cos(2\omega_1 t) - 0.3125 \text{ mA} \cdot \sin(3\omega_1 t)$.

c.) $k = \sqrt{\frac{(I_{2\text{eff}})^2 + (I_{3\text{eff}})^2}{(I_{1\text{eff}})^2 + (I_{2\text{eff}})^2 + (I_{3\text{eff}})^2}} = \sqrt{\frac{(11.25 \text{ mA})^2/2 + (0.3125 \text{ mA})^2/2}{(135.9375 \text{ mA})^2/2 + (11.25 \text{ mA})^2/2 + (0.3125 \text{ mA})^2/2}} = 8.25 \%$

Ü 22: a.) Da der Strom nur zwei Werte annimmt, liegt eine 'Zweipunkt'-Kennlinie vor.

Nur wenn die Spannung größer ist als die Schwellenspannung U_S fließt ein Strom von 10 mA. Andernfalls ist der Strom gleich Null.

$$\text{Es gilt } u(t = 1 \text{ msec}) = 20 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \frac{t}{8 \text{ msec}}) \Big|_{t=1 \text{ msec}} = U_S = 14.142 \text{ V}$$

$$\text{Kennliniengleichung: } i(u) = 5 \text{ mA} \cdot \text{sgn}(u - 14.14 \text{ V}) + 5 \text{ mA}$$

b.) Für den Strom gilt nach Seite 16: $i(t) = 10 \text{ mA} \cdot f_4(x) |_{\alpha = \pi/4}$; $I_{\text{eff}} = 5 \text{ mA}$.

$$\hat{i}_1 = 10 \text{ mA} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sin(\pi/4) = 4.5016 \text{ mA}; \quad I_{1 \text{ eff}} = \frac{\hat{i}_1}{\sqrt{2}} = 3.1831 \text{ mA}$$

Die Grundwelle des Stroms ist gleichphasig mit der Spannung ($\varphi_{i1} = \varphi_u$ d.h. $\varphi_{u i1} = 0^\circ$).

Bei einer sinusförmigen Spannung trägt nur die Grundschwingung des Stroms zur Wirkleistung bei.

$$U_{\text{eff}} = \frac{20 \text{ V}}{\sqrt{2}} = 14.142 \text{ V}; \quad S = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = 70.711 \text{ mVA}$$

$$P = U_{\text{eff}} \cdot I_{1 \text{ eff}} \cdot \cos \varphi_{u i1} = 14.142 \text{ V} \cdot 3.1831 \text{ mA} \cdot \cos 0^\circ = 45.016 \text{ mW}$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 54.530 \text{ mvar}$$

Ü 23: a.)
$$i(t) = \begin{cases} 0.8 \text{ A} \cdot \sin^2(\omega_1 t) & : 0 \leq t < T/2 \\ 0 \text{ A} & : T/2 \leq t < T \end{cases}$$

b.) Stromfluss nur bei $u > 0$ Mittelwert: $\implies \bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 0.8 \text{ A} \sin^2(\omega_1 t) dt = 0.2 \text{ A}$

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} [0.8 \text{ A} \cdot \sin^2(\omega_1 t)]^2 dt = \frac{0.64 \text{ A}^2}{T} \int_0^{T/2} \sin^4(\omega_1 t) dt = 0.12 \text{ A}^2; \quad I_{\text{eff}} = 0.3464 \text{ A}$$

$$\text{c.) } P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 2\sqrt{2} \text{ V} \cdot \sin(\omega_1 t) \cdot 0.8 \text{ A} \cdot \sin^2(\omega_1 t) dt$$

$$P = \frac{1.6\sqrt{2} \text{ W}}{T} \int_0^{T/2} \sin^3(\omega_1 t) dt = \frac{1.6\sqrt{2} \text{ W}}{T} \left[-\frac{1}{\omega_1} \cos(\omega_1 t) \Big|_0^{T/2} + \frac{1}{3\omega_1} \cos^3(\omega_1 t) \Big|_0^{T/2} \right]$$

$$P = \frac{1.6\sqrt{2} \text{ W}}{\omega_1 T} [-\cos(\pi) + \cos(0) + \frac{1}{3}(\cos^3(\pi) - \cos^3(0))] = 0.4802 \text{ W} \quad [\text{Hinweis: } \omega_1 T = 2\pi]$$

Zur Berechnung im Frequenzbereich wären die Fourier-Koeffizienten a_1 ; b_1 des Stroms erforderlich.

$$\text{d.) } S = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = 0.6928 \text{ VA}; \quad Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 0.4994 \text{ var}$$

Ü 24: a.)
$$i(t) = 5 \text{ mA} + 1 \frac{\text{mA}}{\text{V}} \cdot u(t) + 2 \frac{\text{mA}}{\text{V}^2} \cdot u^2(t).$$

$$i(t) = 5 \text{ mA} + 1 \frac{\text{mA}}{\text{V}} \cdot [2 \text{ V} + 1 \text{ V} \cdot \sin(\omega_1 t)] + 2 \frac{\text{mA}}{\text{V}^2} \cdot [2 \text{ V} + 1 \text{ V} \cdot \sin(\omega_1 t)]^2.$$

$$i(t) = 5 \text{ mA} + 2 \text{ mA} + 1 \text{ mA} \cdot \sin(\omega_1 t) + 8 \text{ mA} + 8 \text{ mA} \cdot \sin(\omega_1 t) + 1 \text{ mA} - 1 \text{ mA} \cdot \cos(2\omega_1 t).$$

$$i(t) = 16 \text{ mA} + 9 \text{ mA} \cdot \sin(\omega_1 t) - 1 \text{ mA} \cdot \cos(2\omega_1 t).$$

Aus der Zeitfunktion des Stroms lassen sich die zugehörigen Fourier-Koeffizienten ablesen:

$$a_0 = A_0 = 16 \text{ mA}; \quad b_1 = A_1 = 9 \text{ mA}; \quad \varphi_1 = 0^\circ; \quad a_2 = -1 \text{ mA}; \quad A_2 = 1 \text{ mA}; \quad \varphi_2 = -90^\circ$$

$$a_3 = b_3 = 0 \text{ mA}; \quad A_3 = 0 \text{ mA}; \quad [\varphi_3 = 0^\circ]$$

$$\text{b.) } U_{\text{eff}} = \sqrt{(2 \text{ V})^2 + (\frac{1 \text{ V}}{\sqrt{2}})^2} = 2.1213 \text{ V}; \quad I_{\text{eff}} = \sqrt{(16 \text{ mA})^2 + (\frac{9 \text{ mA}}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1 \text{ mA}}{\sqrt{2}})^2} = 17.234 \text{ mA}$$

$$S = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = 36.558 \text{ mVA}$$

$$P = \bar{U} \cdot \bar{I} + U_{1 \text{ eff}} \cdot I_{1 \text{ eff}} \cdot \cos(\varphi_{u1 i1}) = 2 \text{ V} \cdot 16 \text{ mA} + \frac{1 \text{ V}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{9 \text{ mA}}{\sqrt{2}} \cdot \cos(0^\circ - 0^\circ) = 36.5 \text{ mW}$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 2.061 \text{ mvar}$$

Ü 25: a.) $u(t) = 50 \text{ V} [\text{rect}_{2 \mu\text{sec}}(t + 4 \mu\text{sec}) + 2 \cdot \text{rect}_{2 \mu\text{sec}}(t) + \text{rect}_{2 \mu\text{sec}}(t - 4 \mu\text{sec})]$
 $\underline{U}(j\omega) = \underline{U}_{a1}(j\omega) + \underline{U}_{a2}(j\omega) + \underline{U}_{a3}(j\omega) = 10^{-4} \text{Vsec} \cdot \text{si}(\omega/1 \text{ MHz}) \cdot [e^{j4\omega/1 \text{ MHz}} + 2 + e^{-j4\omega/1 \text{ MHz}}]$
 $\underline{U}(j\omega) = 10^{-4} \text{Vsec} \cdot \text{si}(\omega/1 \text{ MHz}) \cdot [2 + 2 \cdot \cos(4\omega/1 \text{ MHz})]$

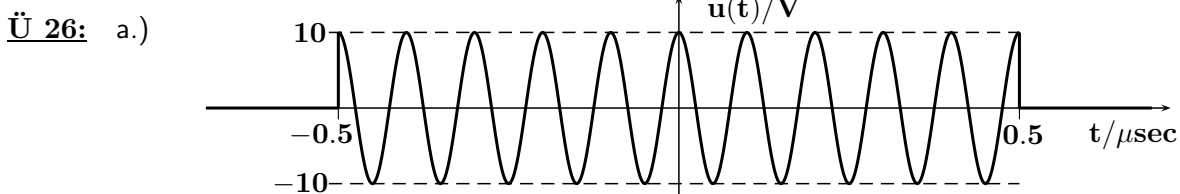
b.) Die erste Nullstelle tritt auf, wenn der Ausdruck in eckigen Klammern Null wird.
 Dann gilt $4\omega_0/1 \text{ MHz} = \pi \Rightarrow f_0 = 125 \text{ kHz}$.

c.) $u(t) = u_{1c}(t) + u_{2c}(t) + u_{3c}(t); \quad \underline{U}(j\omega) = \underline{U}_{1c}(j\omega) + \underline{U}_{2c}(j\omega) + \underline{U}_{3c}(j\omega)$

$\underline{U}_{1c}(j\omega) = 100 \text{ V} \cdot 2 \mu\text{sec} \cdot \text{si}(\omega \cdot 1 \mu\text{sec}) = 2 \cdot 10^{-4} \text{Vsec} \cdot \text{si}(\omega/1 \text{ MHz})$
 $\underline{U}_{2c}(j\omega) = -50 \text{ V} \cdot 6 \mu\text{sec} \cdot \text{si}(\omega \cdot 3 \mu\text{sec}) = -3 \cdot 10^{-4} \text{Vsec} \cdot \text{si}(3\omega/1 \text{ MHz})$
 $\underline{U}_{3c}(j\omega) = 50 \text{ V} \cdot 10 \mu\text{sec} \cdot \text{si}(\omega \cdot 5 \mu\text{sec}) = 5 \cdot 10^{-4} \text{Vsec} \cdot \text{si}(5\omega/1 \text{ MHz})$

d.) Die ersten Nullstellen der Teil-Spektraldichtefunktionen treten auf bei den Frequenzen

$\underline{U}_{b1}(j\omega) : 2 \cdot \pi \cdot f_{01} \cdot 1 \mu\text{sec} = \pi \Rightarrow f_{01} = 500 \text{ kHz}$
 $\underline{U}_{b2}(j\omega) : 2 \cdot \pi \cdot f_{02} \cdot 3 \mu\text{sec} = \pi \Rightarrow f_{02} = 166.67 \text{ kHz}$
 $\underline{U}_{b3}(j\omega) : 2 \cdot \pi \cdot f_{03} \cdot 5 \mu\text{sec} = \pi \Rightarrow f_{03} = 100 \text{ kHz}$



b.) $u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega_T t) = \hat{u} \cdot \frac{e^{j\omega_T t} + e^{-j\omega_T t}}{2}$ c.) $\underline{U}(j\omega) = \hat{u} \cdot \int_{t=-t_1}^{t=t_1} \frac{e^{j(\omega_T - \omega)t} + e^{-j(\omega_T + \omega)t}}{2} dt$

$\underline{U}(j\omega) = \frac{\hat{u}}{2} \left[\frac{e^{+j(\omega_T - \omega)t_1}}{j(\omega_T - \omega)} - \frac{e^{-j(\omega_T + \omega)t_1}}{j(\omega_T + \omega)} - \frac{e^{-j(\omega_T - \omega)t_1}}{j(\omega_T - \omega)} + \frac{e^{+j(\omega_T + \omega)t_1}}{j(\omega_T + \omega)} \right]$
 $\underline{U}(j\omega) = \frac{\hat{u}}{2} \left[\frac{e^{+j(\omega_T - \omega)t_1} - e^{-j(\omega_T - \omega)t_1}}{j(\omega_T - \omega)} + \frac{e^{+j(\omega_T + \omega)t_1} - e^{-j(\omega_T + \omega)t_1}}{j(\omega_T + \omega)} \right]$ Mit $\frac{e^{+jx} - e^{-jx}}{2j} = \sin(x)$ folgt :
 $\underline{U}(j\omega) = \frac{\hat{u} \sin(\omega_T - \omega)t_1}{\omega_T - \omega} + \frac{\hat{u} \sin(\omega_T + \omega)t_1}{\omega_T + \omega} = \hat{u} \cdot t_1 \cdot \left[\frac{\sin(\omega_T - \omega)t_1}{(\omega_T - \omega)t_1} + \frac{\sin(\omega_T + \omega)t_1}{(\omega_T + \omega)t_1} \right]$
 $\underline{U}(j\omega) = \hat{u} \cdot t_1 \cdot \{ \text{si}[(\omega_T - \omega)t_1] + \text{si}[(\omega_T + \omega)t_1] \}$.

Das Einsetzen der gegebenen Werte ergibt [die Funktion si(x) ist eine gerade Funktion und deshalb gilt auch $\text{si}(-x) = \text{si}(x)$] die folgenden Ausdrücke (Übliche Schreibweise):

$\underline{U}(f) = 5 \mu\text{Vsec} \cdot \{ \text{si}[(2\pi f - 2\pi 10 \text{ MHz})0.5 \mu\text{sec}] + \text{si}[(2\pi f + 2\pi 10 \text{ MHz})0.5 \mu\text{sec}] \}$

d.) $\underline{U}(f) = 5 \mu\text{Vsec} \cdot \left\{ \text{si}\left[2\pi\left(\frac{f}{2 \text{ MHz}} - 5\right)\right] + \text{si}\left[2\pi\left(\frac{f}{2 \text{ MHz}} + 5\right)\right] \right\} = \text{Term}_1 + \text{Term}_2$

Bei $\tilde{f}_{\text{max}1} \approx 10 \text{ MHz}$ bzw. $\tilde{f}_{\text{max}2} \approx -10 \text{ MHz}$ wird Term₁ bzw. Term₂ maximal, da das Argument seiner si-Funktion zu Null wird; Term₂ bzw. Term₁ hat bei dieser Frequenz den Wert 0. Die Frequenzen für die absoluten Maxima werden durch die 'Ausläufer' des jeweils anderen Terms hier nur unwesentlich gegenüber den si-Maxima verschoben ($f_{\text{max}} = \pm 10.015 \text{ MHz}$).

e.) Nullstellen im Spektrum treten bei allen Frequenzen auf, bei denen das Argument der si-Funktion gleich $n \cdot \pi$; ($n \neq 0$) ist :

$f/\text{MHz} = 0$ [Das Signal u(t) ist gleichstromfrei!], $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm 8, \pm 9, \pm 11, \pm 12, \dots$

f.) $\underline{U}(f = 5.5 \text{ MHz}) = 5 \mu\text{Vsec} \cdot \left\{ \text{si}\left[2\pi\left(\frac{5.5 \text{ MHz}}{2 \text{ MHz}} - 5\right)\right] + \text{si}\left[2\pi\left(\frac{5.5 \text{ MHz}}{2 \text{ MHz}} + 5\right)\right] \right\}$
 $\underline{U}(f = 5.5 \text{ MHz}) = 5 \mu\text{Vsec} \cdot \{ \text{si}[-4.5\pi] + \text{si}[15.5\pi] \} = 5 \mu\text{Vsec} \cdot \left\{ \frac{\sin(-4.5\pi)}{-4.5\pi} + \frac{\sin(15.5\pi)}{15.5\pi} \right\}$
 $\underline{U}(f = 5.5 \text{ MHz}) = 0.2510 \mu\text{Vsec}$

Ü 27:

a.) Man erhält $u_2(t)$ aus $u_1(t)$ als Summe

1. eines im Zeitbereich um τ verschobenen Impulses und
2. eines um $-\tau$ verschobenen und geklappten (Vorzeichenwechsel!) Impulses

und findet so : $u_2(t) = u_1(t - \tau) - u_1(t + \tau)$.

b.)
$$\underline{U}_2(j\omega) = \underline{U}_1(j\omega) \cdot e^{-j\omega\tau} - \underline{U}_1(j\omega) \cdot e^{+j\omega\tau} = \underline{U}_1(j\omega) \cdot [e^{-j\omega\tau} - e^{+j\omega\tau}] = \underline{U}_1(j\omega) \cdot [-2j \cdot \sin(\omega\tau)]$$

$$\underline{U}_2(j\omega) = -j 2 \cdot \hat{u} \cdot \tau \cdot \sin(\omega\tau) \cdot \text{si}^2(\omega\tau/2)$$

c.)
$$\underline{U}_2(j\omega = 0) = -j 2 \cdot \hat{u} \cdot \tau \cdot \sin(0) \cdot \text{si}^2(0) = -j 2 \cdot \hat{u} \cdot \tau \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

Für den Wert der Spektraldichtefunktion bei $\omega = 0$ gilt
$$\underline{U}_2(j\omega = 0) = \int_{t=-\infty}^{\infty} u_2(t) dt$$
.

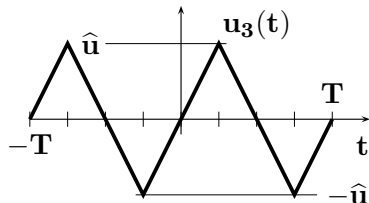
Da $u_2(t)$ ein gleichstromfreies Signal ist, muss die zugehörige Spektraldichtefunktion bei $\omega = 0$ den Wert Null besitzen.

d.) Die erste Nullstelle des ersten Faktors tritt auf bei $\sin(\omega\tau) = 0$ für $2\pi f_{01} \cdot \tau = \pi \Rightarrow f_{01} = 250 \text{ kHz}$

Die erste Nullstelle des zweiten Faktors tritt auf bei $\text{si}^2(\omega\tau/2) = 0$ für $2\pi f_{02} \cdot \tau/2 = \pi \Rightarrow f_{02} = 500 \text{ kHz}$

Der kleinere Wert der beiden Frequenzen stellt die gesuchte Lösung dar: $f_0 = f_{01} = 250 \text{ kHz}$.

e.) Die im Bild dargestellte periodische Dreiecksspannung $u_3(t)$ wird im Weiteren betrachtet.



f.) Für die periodische Zeitfunktion $u_3(t)$ erhält man als komplexe Fourier-Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T} \underline{U}_2(j\omega)|_{\omega=n\omega_1; \tau=T/4} = \frac{1}{T} \left[-j 2 \cdot \hat{u} \cdot \frac{T}{4} \cdot \sin(n\omega_1 T/4) \cdot \text{si}^2(n\omega_1 T/8) \right]$$

Aus der Gleichung $c_n = -j \frac{\hat{u}}{2} \cdot \sin(\frac{n\omega_1 T}{4}) \cdot \text{si}^2(\frac{n\omega_1 T}{8})$ folgt für $n=1$

$$c_1 = -j \frac{\hat{u}}{2} \cdot \sin(\frac{\omega_1 T}{4}) \cdot \text{si}^2(\frac{\omega_1 T}{8})$$
, und mit $\omega_1 T = 2\pi$ erhält man

$$c_1 = -j \frac{\hat{u}}{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) \cdot \text{si}^2(\frac{\pi}{4}) = -j \frac{\hat{u}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{(\sqrt{2}/2)^2}{(\pi/4)^2} = -j \frac{4\hat{u}}{\pi^2} = \frac{a_1 - jb_1}{2}$$

Daraus ergeben sich die beiden reellen Fourier-Koeffizienten $a_1 = 0$; $b_1 = \frac{8\hat{u}}{\pi^2}$.

Da $u_3(t)$ eine ungerade Zeitfunktion ist, sind alle c_n imaginär und deshalb auch alle $a_n = 0$.

Ü 28: $u(x) = f_{12}(x + \frac{\pi}{2})$

$$f_{12}(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos(2x)}{1 \cdot 3} + \frac{\cos(4x)}{3 \cdot 5} + \frac{\cos(6x)}{5 \cdot 7} + \frac{\cos(8x)}{7 \cdot 9} + \dots \right]$$

$$u(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(x + \frac{\pi}{2}) - \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos(2[x + \frac{\pi}{2}])}{1 \cdot 3} + \frac{\cos(4[x + \frac{\pi}{2}])}{3 \cdot 5} + \frac{\cos(6[x + \frac{\pi}{2}])}{5 \cdot 7} + \frac{\cos(8[x + \frac{\pi}{2}])}{7 \cdot 9} + \dots \right]$$

$$u(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(2x)}{1 \cdot 3} + \frac{\cos(4x)}{3 \cdot 5} - \frac{\cos(6x)}{5 \cdot 7} + \frac{\cos(8x)}{7 \cdot 9} - + \dots \right]$$

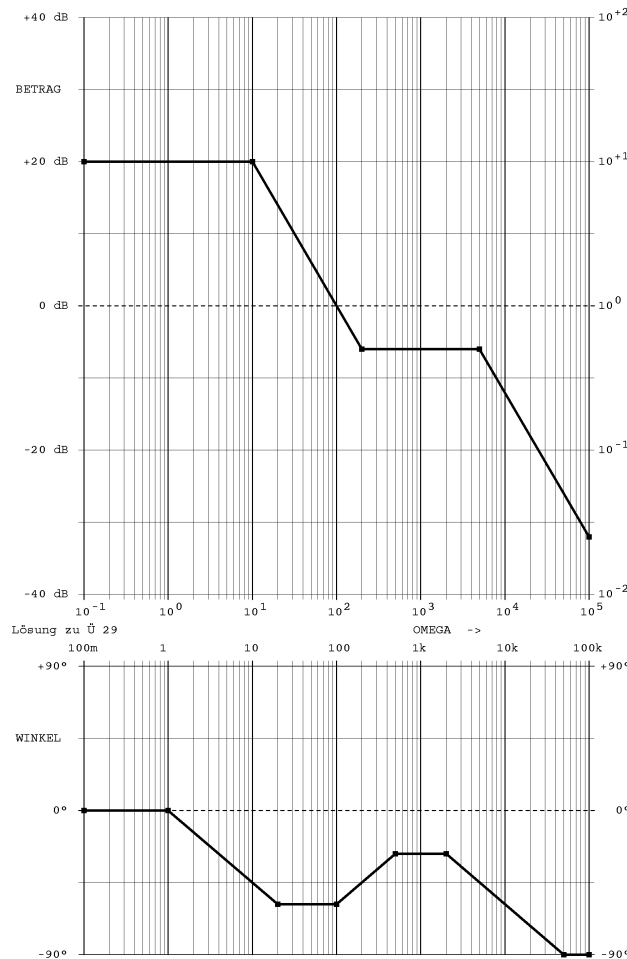
Ü 29: Kennwerte der normierten Funktion $G(j\omega) = \frac{10 \cdot (1 + j\omega/200)}{(1 + j\omega/10) \cdot (1 + j\omega/5000)}$:

Verstärkung bei tiefen Frequenzen: $G(j\omega \rightarrow 0) = 10 \hat{=} + 20 \text{ dB}$

Die Polstelle bei $s = -10$ bewirkt eine Eckkreisfrequenz $\omega_{\infty 1} = 10$ und deshalb tritt im Betragsverlauf einen Knick um -20 dB/Dekade bei $\omega = 10$ auf. Der Phasenwinkelbeitrag dieser reellen Polstelle verläuft (über der logarithmisch unterteilten Frequenzachse) linear beginnend bei $\omega_{\infty 1}/10 = 1$ bis $\omega_{\infty 1} \cdot 10 = 100$ von 0° bis -90° .

Die Nullstelle bei $s = -200$ bewirkt eine Eckkreisfrequenz $\omega_0 = 200$ und deshalb tritt im Betragsverlauf einen Knick um $+20 \text{ dB/Dekade}$ bei $\omega = 200$ auf. Der Phasenwinkelbeitrag der reellen Nullstelle verläuft (über der logarithmisch unterteilten Frequenzachse) linear beginnend bei $\omega_0/10 = 20$ bis $\omega_0 \cdot 10 = 2000$ von 0° bis $+90^\circ$.

Die Polstelle bei $s = -5000$ bewirkt eine Eckkreisfrequenz $\omega_{\infty 2} = 5000$ und deshalb tritt im Betragsverlauf einen Knick um -20 dB/Dekade bei $\omega = 5000$ auf. Der Phasenwinkelbeitrag dieser reellen Polstelle verläuft (über der logarithmisch unterteilten Frequenzachse) linear beginnend bei $\omega_{\infty 2}/10 = 500$ bis $\omega_{\infty 2} \cdot 10 = 50000$ von 0° bis -90° .



Ü 30: a.) Konstante $Q = \frac{Q_Z}{Q_N} = \frac{-0.005 \text{ sec}}{+0.01 \text{ sec}} = -0.5$; Grad der Funktion: $n = 1$

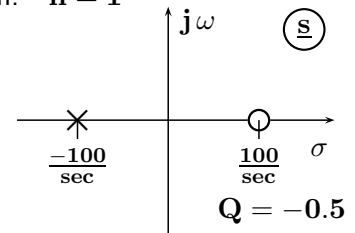
Nullstelle: $s_0 = +100 \frac{1}{\text{sec}}$; Polstelle: $s_\infty = -100 \frac{1}{\text{sec}}$

b.) $\underline{G}(s) = 0.5 \cdot \frac{1-s \cdot 0.01 \text{ sec}}{1+s \cdot 0.01 \text{ sec}}$

$\underline{G}(j\omega) = 0.5 \cdot \frac{1-j\omega \cdot 0.01 \text{ sec}}{1+j\omega \cdot 0.01 \text{ sec}} = |\underline{G}(j\omega)| \cdot e^{j\varphi}$

$|\underline{G}(j\omega)| = \frac{|G_Z(j\omega)|}{|G_N(j\omega)|} = 0.5 \cdot \frac{|1-j\omega \cdot 0.01 \text{ sec}|}{|1+j\omega \cdot 0.01 \text{ sec}|} = 0.5 \cdot \frac{\sqrt{1^2+(-\omega \cdot 0.01 \text{ sec})^2}}{\sqrt{1^2+(\omega \cdot 0.01 \text{ sec})^2}} = 0.5$

$\varphi = \varphi_Z - \varphi_N = \arctan \frac{-\omega \cdot 0.01 \text{ sec}}{1} - \arctan \frac{\omega \cdot 0.01 \text{ sec}}{1} = -2 \cdot \arctan(\omega \cdot 0.01 \text{ sec})$



c.) Das Verhalten dieser Funktion wird als ALLPASS bezeichnet. Dies ist ein besonderes Filter, dessen selektive Wirkung sich nicht im Betragsverlauf sondern im Phasenwinkelverlauf zeigt.

$\omega \cdot \text{sec}$	$ \underline{G}(j\omega) $	$ \underline{G}(j\omega) /\text{dB}$	φ	Bemerkung
0	0.5	-6.021	0°	-
100	0.5	-6.021	-90°	Eckfrequenz
$\rightarrow \infty$	0.5	-6.021	-180°	-

d.) Nennerpolynom: $1 + s\tau \Rightarrow 1 + j\omega\tau$; $|\text{Re}(j\omega_g)| = |\text{Im}(j\omega_g)| \Rightarrow \omega_{g\infty} = \frac{1}{\tau} = 100 \frac{1}{\text{sec}}$

Zählerpolynom: $0.5 \cdot (1 - s\tau) \Rightarrow 0.5 \cdot (1 - j\omega\tau) = 0.5 - j0.5 \cdot \omega\tau$; $\omega_{g0} = \frac{1}{\tau} = 100 \frac{1}{\text{sec}}$

Ü 31: a.) Anfangswert: $i(t=0-) = \frac{U_0}{R_1} = 0.4 \text{ A}$ Zeitkonstante $\tau = \frac{L}{R_1+R_2} = 8 \text{ msec}$

DGL: $i \cdot (R_1 + R_2) + L \cdot i' = U_0$; $i' + i \cdot \frac{R_1+R_2}{L} = \frac{U_0}{L}$; $i' + i \cdot \frac{1}{\tau} = \frac{U_0}{L}$

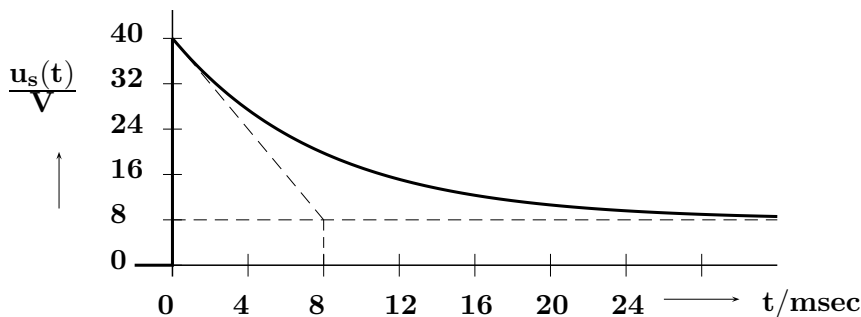
b.) Lösungsansatz: $i(t) = i_h(t) + i_s(t) = A \cdot e^{-t/\tau} + \frac{U_0}{R_1+R_2}$

Anfangswert einsetzen: $i(t=0-) = \frac{U_0}{R_1} = A + \frac{U_0}{R_1+R_2}$. Daraus folgt $A = U_0 \cdot [\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1+R_2}]$

$i(t) = U_0 \cdot ([\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1+R_2}] \cdot e^{-t/\tau} + \frac{1}{R_1+R_2})$

c.) $u_s(t) = i(t) \cdot R_2 = 10 \text{ V} \cdot ([\frac{1}{25 \Omega} - \frac{1}{125 \Omega}] \cdot e^{-t/8 \text{ msec}} + \frac{1}{125 \Omega}) \cdot 100 \Omega$

$u_s(t) = (320 \text{ mA} \cdot e^{-t/8 \text{ msec}} + 80 \text{ mA}) \cdot 100 \Omega = 32 \text{ V} \cdot e^{-t/8 \text{ msec}} + 8 \text{ V}$



Ü 32: a.) DGL nach Seite 54: $u'_{C1} \cdot \tau_1 + u_{C1} = 2 \cdot U_0$

Zeitkonstanten: $\tau_1 = R \cdot C = 1 \text{ msec}$; $\tau_2 = R \cdot 3C = 3 \text{ msec}$

Die Maschengleichung $2U_0 = u_{C1} + u_{C2} + U_0$ und $Q = C_1 u_{C1} = C_2 u_{C2} \rightarrow \frac{u_{C1}}{u_{C2}} = \frac{C_2}{C_1}$

führen zu den Anfangswerten: $u_{C1}(t=0-) = \frac{3}{4} \cdot U_0 = 3 \text{ V}$; $u_{C2}(t=0-) = \frac{1}{4} \cdot U_0 = 1 \text{ V}$

b.) $u_{C1}(t) = u_{C1}(t=0-) + [2U_0 - u_{C1}(t=0-)](1 - e^{-t/\tau_1}) = 8 \text{ V} - 5 \text{ V} \cdot e^{-t/1 \text{ msec}}$

c.) $i_1(t=0+) = \frac{2 \cdot U_0 - u_{C1}(0-)}{R} = 5 \text{ mA}$; $i_2(t=0+) = \frac{U_0 + u_{C2}(0-)}{R} = 5 \text{ mA}$

$i(t=0+) = i_1(t=0+) + i_2(t=0+) = 10 \text{ mA}$

d.) $i(t) = 5 \text{ mA} \cdot (e^{-t/1 \text{ msec}} + e^{-t/3 \text{ msec}})$

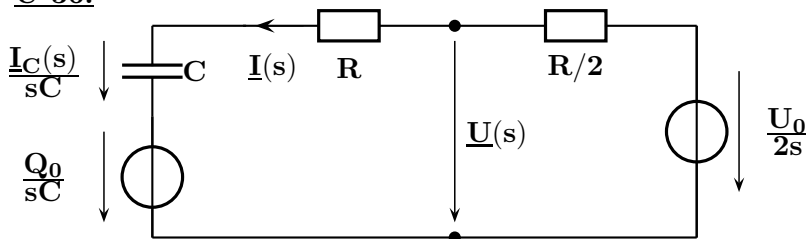
e.) $i(t) = 5 \text{ mA} \cdot (e^{-1} + e^{-1/3}) = 5.4221 \text{ mA}$

Ü 33: a.) $i_1(t = 0^-) = 0$; $\tau_1 = \frac{L}{R_1} = 1 \text{ msec}$; $i_1 \cdot R_1 + L \cdot i_1' = U_0$; $i_1' + i_1 \cdot \frac{1}{\tau_1} = \frac{U_0}{L}$
 $u_C(t = 0^-) = U_0 = 10 \text{ V}$; $\tau_2 = R_2 \cdot C = 1 \text{ msec}$; $\tau_2 \cdot u_C' + u_C = 0$; $u_C' + u_C \cdot \frac{1}{\tau_2} = 0$
 b.) $i_1(t) = \frac{U_0}{R_1} \cdot (1 - e^{-t/\tau_1})$; $i_2(t) = -\frac{u_C(0^-)}{R_2} \cdot e^{-t/\tau_2}$; $i(t) = i_1(t) - i_2(t)$
 $i(t) = \frac{10 \text{ V}}{500 \Omega} \cdot (1 - e^{-t/1 \text{ msec}}) + \frac{10 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega} \cdot e^{-t/1 \text{ msec}}$
 $i(t) = 20 \text{ mA} \cdot (1 - e^{-t/1 \text{ msec}}) + 10 \text{ mA} \cdot e^{-t/1 \text{ msec}} = 20 \text{ mA} - 10 \text{ mA} \cdot e^{-t/1 \text{ msec}}$
 c.) $i(t = 0^+) = 10 \text{ mA}$ (Entladung von C) $i(t \rightarrow \infty) = 20 \text{ mA}$ (Strom durch L).

Ü 34: a.) DGL: $\tau \cdot u_C' + u_C = U_0 \cdot (1 - e^{-\alpha t})$ mit $\frac{1}{\alpha} = 2\tau = 2RC$; $\tau = 1 \text{ msec}$
 b.) $\tau \cdot [s \cdot \underline{U}_C(s) - U_{C0}] + \underline{U}_C(s) = \frac{U_0}{s(1+s \cdot 2\tau)}$; $\underline{U}_C(s)[1 + s \cdot \tau] - \tau \cdot U_{C0} = \frac{U_0}{s(1+s \cdot 2\tau)}$
 $\underline{U}_C(s) = \frac{U_0}{s(1+s \cdot \tau)(1+s \cdot 2\tau)} + \frac{\tau \cdot U_{C0}}{1+s \cdot \tau}$. Rücktransformation der Bildfunktion nach Seite 63/64.
 (Nr. 20 mit $a=\tau$, $b=2\tau$ und Nr. 8 mit $a=\tau$) führt auf folgende Zeitfunktion:
 $u_C(t) = U_0 \cdot [1 + e^{-t/\tau} - 2e^{-t/2\tau}] + U_{C0} \cdot e^{-t/\tau}$
 c.) $u_2(t) = u_1(t) - u_C(t) = U_0 \cdot e^{-t/2\tau} - (U_0 + U_{C0}) \cdot e^{-t/\tau} = 10 \text{ V} \cdot e^{-t/2\tau} - 15 \text{ V} \cdot e^{-t/\tau}$
 d.) $10 \text{ V} \cdot e^{-t_0/2 \text{ msec}} = 15 \text{ V} \cdot e^{-t_0/1 \text{ msec}}$; $\ln(10) + \frac{-t_0}{2 \text{ msec}} = \ln(15) + \frac{-t_0}{1 \text{ msec}}$; $t_0 = 0.8109 \text{ msec}$

Ü 35: a.) $\underline{U}(s) = \frac{U_0/(\tau/4)}{s^2} = \frac{4 \cdot U_0/\tau}{s^2}$ Zeitkonstante $\tau = RC = 1 \text{ msec}$
 b.) $\underline{I}(s) = \underline{U}(s) \cdot \underline{Y}(s)$; $\underline{Y}(s) = \frac{sC}{1+s\tau} + \frac{sC}{1+s2\tau} = \frac{sC \cdot (2+s3\tau)}{(1+s\tau)(1+s2\tau)}$
 $\underline{I}(s) = \frac{8 \cdot U_0}{R} \cdot \frac{1}{s(1+s\tau)(1+s2\tau)} + \frac{12 \cdot U_0 \cdot \tau}{R} \cdot \frac{1}{(1+s\tau)(1+s2\tau)}$
 c.) $i(t) = \left\{ \frac{8 \cdot U_0}{R} \cdot [1 + e^{-t/\tau} - 2e^{-t/2\tau}] + \frac{12 \cdot U_0}{R} \cdot [e^{-t/2\tau} - e^{-t/\tau}] \cdot \sigma(t) \right\}$
 $i(t) = \frac{4 \cdot U_0}{R} \cdot [2 - e^{-t/\tau} - e^{-t/2\tau}] \cdot \sigma(t) = 1 \text{ mA} \cdot [2 - e^{-t/1 \text{ msec}} - e^{-t/2 \text{ msec}}] \cdot \sigma(t)$
 d.) $i(t_1) = 0 \text{ mA}$; $i(t_2) = 2 \text{ mA}$; $\frac{di}{dt} = \frac{1 \text{ mA}}{1 \text{ msec}} + \frac{1 \text{ mA}}{2 \text{ msec}} = 1.5 \frac{\text{A}}{\text{sec}}$

Ü 36:



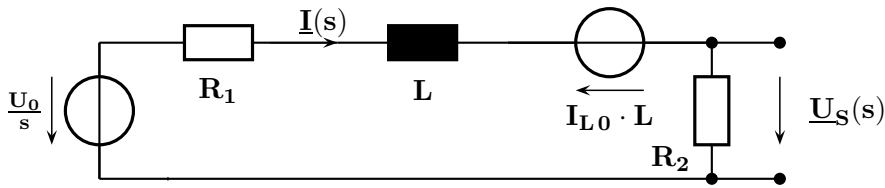
a.) Die Ersatzschaltung im Bildbereich enthält eine Ersatzquelle für U_0 mit dem Spannungsteiler sowie eine Spannungsquelle in Reihe zu C, die die Vorladung erfasst.

$\underline{I}(s) = \frac{U_0/(2s) - Q_0/sC}{3R/2 + 1/sC} = \frac{U_0C - 2Q_0}{2 + s3RC} = \frac{U_0C - 2Q_0}{3RC(s + 2/(3RC))}$
 $\underline{U}(s) = \frac{Q_0}{sC} + \underline{I}(s) \cdot (R + \frac{1}{sC}) = \frac{Q_0}{sC} + \frac{U_0C - 2Q_0}{3RC(s + 2/(3RC))} \cdot \frac{1 + sRC}{sC}$ oder $\underline{U}(s) = \frac{U_0}{2s} - \frac{\underline{I}(s) \cdot R}{2}$
 Einsetzen von $\frac{Q_0}{C} = U_0$ und Umformung so, dass die Pol- und Nullstellen sichtbar werden:
 $\underline{U}(s) = \frac{U_0}{s} + \frac{(U_0 - 2U_0)(1+sRC)}{s \cdot 3RC(s + \frac{2}{3RC})} = U_0 \cdot [\frac{1}{s} - \frac{1+sRC}{s \cdot 3RC \cdot (s + \frac{2}{3RC})}] = U_0 \cdot \frac{s \cdot 2RC + 1}{s \cdot 3RC(s + \frac{2}{3RC})} = U_0 \cdot \frac{2(s + \frac{1}{2RC})}{s \cdot 3(s + \frac{2}{3RC})}$
 Kennwerte der Bildfunktion $\underline{U}(s)$: Grad $n = 2$; Konstante $Q = \frac{2U_0}{3}$.
 2 Polstellen: $s_{\infty 1} = 0$, $s_{\infty 2} = -\frac{2}{3RC}$; 2 Nullstellen: $s_{01} = -\frac{1}{2RC}$, $s_{02} \rightarrow \infty$.
 b.) Wirksame Zeitkonstante der Polstelle: $\tau = (R + R/2)C = 3RC/2 = 1.5 \text{ msec}$.
 c.) Für $t = t_1$ ist C noch abgetrennt: $u(t_1) = \frac{U_0}{2} = 7.5 \text{ V}$.
 Bei $t = t_2$ wird C (vorgeladen auf $U_{C0} = 15 \text{ V}$) gerade zugeschaltet: $u(t_2) = \frac{2U_0}{3} = 10 \text{ V}$.

Bei $t = t_3$ ist C auf die Leerlaufspannung der Ersatzquelle aufgeladen: $u(t_3) = \frac{U_0}{2} = 7.5 \text{ V}$.

Ü 37: a.) Vor dem Öffnen von S fließt der Strom $I_{L0} = \frac{U_0}{R_1} = \frac{10 \text{ V}}{25 \text{ Ohm}} = 0.4 \text{ A}$.

Ersatzschaltung im Bildbereich für $t > 0$ (mit Spannungsquelle für den Anfangswert des Stroms durch L):



b.) Die Maschengleichung lautet $\frac{U_0}{s} = \underline{I}(s) \cdot [R_1 + R_2 + sL] - I_{L0} \cdot L$.

Aufgelöst nach dem Strom erhält man daraus $\underline{I}(s) = \frac{U_0 + I_{L0} \cdot L}{R_1 + R_2 + sL}$

und kann die Spannung am (offenen) Schalter nach dem Ohmschen Gesetz berechnen.

$$\underline{U}_S(s) = \underline{I}(s) \cdot R_2 = \frac{U_0 \cdot R_2 + I_{L0} \cdot R_2 \cdot L}{(R_1 + R_2)(1 + s \frac{L}{R_1 + R_2})} = \frac{U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}}{s \cdot (1 + s \cdot \frac{L}{R_1 + R_2})} + \frac{I_{L0} \cdot \frac{R_2 \cdot L}{R_1 + R_2}}{1 + s \frac{L}{R_1 + R_2}} = \frac{8 \text{ V}}{s \cdot (1 + s \cdot 8 \cdot 10^{-3} \text{ sec})} + \frac{0.32 \text{ A} \cdot 1 \frac{\text{V} \cdot \text{sec}}{\text{A}}}{1 + s \cdot 8 \cdot 10^{-3} \text{ sec}}$$

c.) $u_S(t)$ (Bild siehe Lösung Ü 31 c) erhält man durch gliedweise Rücktransformation nach Seite 64.

$$u_S(t) = 8 \text{ V} \cdot (1 - e^{-t/8 \text{ msec}}) \cdot \sigma(t) + 40 \text{ V} \cdot e^{-t/8 \text{ msec}} \cdot \sigma(t) = [8 \text{ V} + 32 \text{ V} \cdot e^{-t/8 \text{ msec}}] \cdot \sigma(t)$$

Ü 38: Die Lösung folgt dem TP-Beispiel auf Seite 58. Zeitkonstante: $\tau = RC = 5 \text{ msec}$

Für $t \leq 2 \text{ msec}$ gilt:

$$u_2(t) = 0 \text{ V}$$

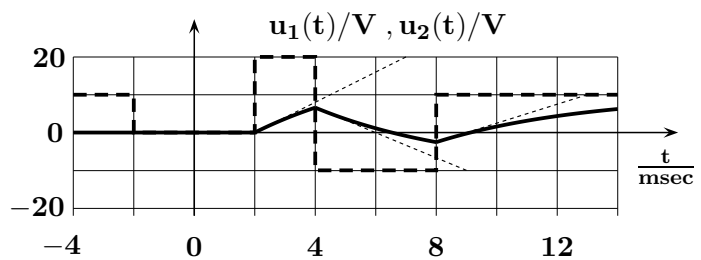
Für $2 \text{ msec} \leq t \leq t_1 = 4 \text{ msec}$ gilt:

$$U_{\text{Anf}} = 0 \text{ V}; \quad U_{\text{End}} = 20 \text{ V}$$

$$u_2(t) = 20 \text{ V} + (0 - 20) \text{ V} \cdot e^{-\frac{t-2 \text{ msec}}{5 \text{ msec}}}$$

$$u_2(t_1^-) = 20 \text{ V} - 20 \text{ V} \cdot e^{-0.4} = 6.594 \text{ V}; \quad u_2(t_1^+) = 6.594 \text{ V} \quad (\text{da } u_C \text{ immer stetig verläuft!})$$

$$u_2(t = 8 \text{ msec}) = -2.544 \text{ V}; \quad u_2(t = 10 \text{ msec}) = 1.592 \text{ V}$$



Ü 39: Die Lösung folgt dem HP-Beispiel auf Seite 59. Zeitkonstante: $\tau = RC = 10 \text{ msec}$

Für $t < t_1 = 0 \text{ msec}$ gilt:

$$u_2(t) = 0 \text{ V} \quad \text{HP sperrt Gleichspannung!}$$

$$u_2(t_1^+) = -20 \text{ V}$$

Sprung wird voll zum Ausgang übertragen!

Für $t_1 = 0 \text{ msec} \leq t \leq t_2 = 20 \text{ msec}$ gilt:

$$U_{\text{Anf}} = -20 \text{ V}; \quad U_{\text{End}} = 0 \text{ V}$$

$$u_2(t) = 0 \text{ V} + (-20 + 0) \text{ V} \cdot e^{-\frac{t}{10 \text{ msec}}}; \quad u_2(t_2^-) = -20 \text{ V} \cdot e^{-2} = -2.7067 \text{ V}$$

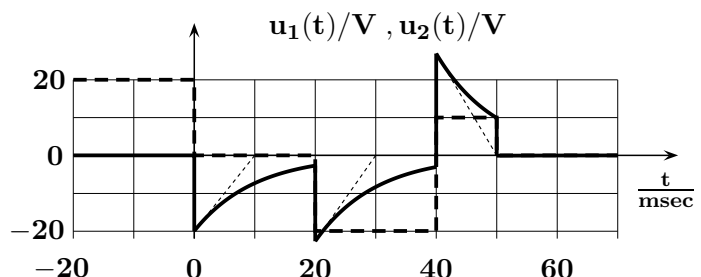
$$u_2(t_2^+) = -2.7067 \text{ V} - 20 \text{ V} = -22.7067 \text{ V}; \quad \text{Sprung wird voll zum Ausgang übertragen!}$$

$$u_2(t = 40 \text{ msec}^-) = -22.7067 \text{ V} \cdot e^{-2} = -3.0730 \text{ V}$$

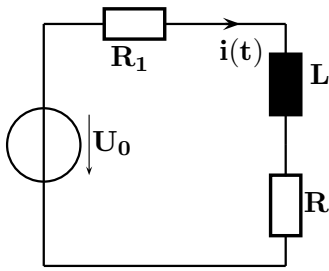
$$u_2(t = 40 \text{ msec}^+) = -3.0730 \text{ V} + 30 \text{ V} = 26.927 \text{ V}$$

$$u_2(t = 50 \text{ msec}^-) = 26.927 \text{ V} \cdot e^{-1} = 9.9059 \text{ V}$$

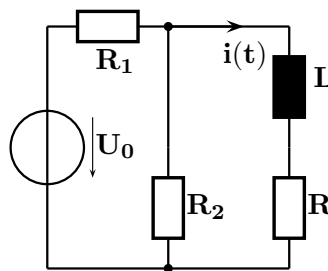
$$u_2(t = 50 \text{ msec}^+) = 9.9059 \text{ V} - 10 \text{ V} = -0.0941 \text{ V}$$



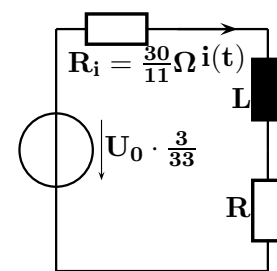
Ü 40: Schaltung für a.)



Schaltung für b.)

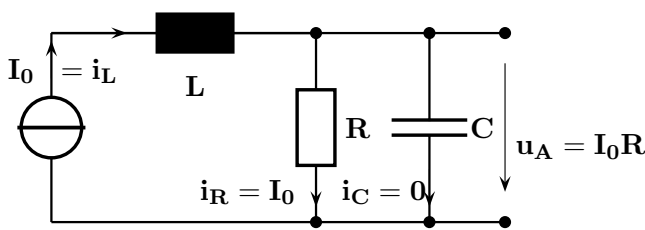


Ersatzschaltung für b.)

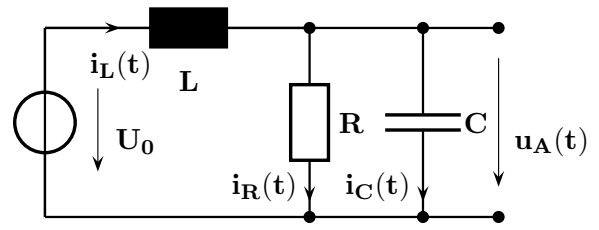


- a.) $S = \text{offen}, \quad i = 0.25 \text{ A}; \quad \tau_1 = \frac{L}{R+R_1} = \frac{1}{1100} \text{ sec}; \quad i_{\max} = \frac{U_0}{R+R_1} = 1 \text{ A}$
 $S \text{ schließt bei } i(t_1) = 0.9 \text{ A} = 0.25 \text{ A} + (1 - 0.25) \text{ A} \cdot (1 - e^{-t_1/\tau_1}) \Rightarrow t_1 = 1.832 \text{ msec}$
- b.) $S = \text{zu}, \quad i = 0.9 \text{ A}; \quad \tau_2 = \frac{L}{R+R_i} = \frac{1}{800} \text{ sec}; \quad i_{\min} = \frac{U_0/11}{R+R_i} = 0.125 \text{ A}$
 $S \text{ öffnet bei } i(t_2) = 0.25 \text{ A} = 0.125 \text{ A} + (0.9 - 0.125) \text{ A} \cdot e^{-t_2/\tau_2} \Rightarrow t_2 = 2.281 \text{ msec}$
- c.) $T = t_1 + t_2 = 4.113 \text{ msec}; \quad f = \frac{1}{T} = 243.1 \text{ Hz}$

Ü 41: Schaltbild 1 für $t < 0$.



Schaltbild 2 für $t > 0$.



- a.) Es gilt $i_L(t = 0^-) = I_0$, C wird auf $u_A(t = 0^-) = I_0 \cdot R$ geladen; deshalb: $i_C(t = 0^-) = 0$.
 Für $t = 0^+$ gilt bei der Induktivität $i_L(t = 0^+) = i_L(t = 0^-)$ [Strom durch L verläuft immer stetig]
 sowie bei der Kapazität $u_A(t = 0^+) = u_A(t = 0^-)$ [Spannung an C verläuft immer stetig].
 Deshalb bleibt auch für $t = 0^+$ $i_C(t) = 0$ und damit erhält man für $u'_A(t = 0^+) = 0$.
 Für $t \rightarrow \infty$ wird sich C auf die Spannung der Quelle aufladen: $u_A(t \rightarrow \infty) = U_0$.

b.) MGL : $U_0 = u_L(t) + u_A(t) = L \cdot i'_L(t) + u_A(t)$

KPGL : $i_L(t) = i_R(t) + i_C(t) = \frac{u_A(t)}{R} + C \cdot u'_A(t)$ abgeleitet: $i'_L(t) = \frac{u'_A(t)}{R} + C \cdot u''_A(t)$ in MGL.

$U_0 = u_A(t) + u'_A(t) \frac{L}{R} + u''_A(t) \cdot LC \Rightarrow \boxed{u''_A(t) + u'_A(t) \frac{1}{RC} + u_A(t) \frac{1}{LC} = \frac{U_0}{LC} = \text{konst.}}$

c.) $p = \frac{1}{RC} = 100 \text{ sec}^{-1}; \quad q = \frac{1}{LC} = 2500 \text{ sec}^{-2}; \quad \lambda^2 + p\lambda + q = 0; \quad \lambda_{1,2} = -50 \text{ sec}^{-1}$

Reeller doppelter Eigenwert : Das System ist nicht schwingungsfähig (Aperiodischer Grenzfall).

d.) Ansatz für den vorliegenden Fall: $u_{Ah}(t) = A \cdot e^{\lambda t} + B \cdot t \cdot e^{\lambda t}$

Die spezielle Lösung ergibt sich nach a.) zu $u_{As}(t) = u_A(t \rightarrow \infty) = U_0 = -20 \text{ V}$

Für $(t = 0^+)$: $u_A = u_{Ah} + u_{As} = I_0 \cdot R = 10 \text{ V} \Rightarrow A \cdot 1 + B \cdot 0 \cdot 1 - 20 \text{ V} = 10 \text{ V} \Rightarrow A = 30 \text{ V}$

$u'_A = \lambda \cdot A \cdot e^{\lambda t} + B \cdot e^{\lambda t} + B \cdot \lambda \cdot t \cdot e^{\lambda t} = 0 \text{ V} \Rightarrow -50 \text{ sec}^{-1} \cdot 30 \text{ V} + B = 0 \text{ V} \Rightarrow B = 1500 \frac{\text{V}}{\text{sec}}$

$u_A(t) = 30 \text{ V} \cdot e^{-50t/\text{sec}} + 1500 \frac{\text{V}}{\text{sec}} \cdot t \cdot e^{-50t/\text{sec}} - 20 \text{ V} = 30 \text{ V} \cdot e^{-50t/\text{sec}} \cdot [1 + 50 \frac{1}{\text{sec}} \cdot t] - 20 \text{ V}$

e.) Mit den Werten der Tabelle kann der gesuchte Verlauf genügend genau gezeichnet werden.

t/msec	-10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$u_A(t)/\text{V}$	10	10	7.29	2.07	-3.27	-7.82	-11.38	-14.03	-15.92	-17.25	-18.17	-18.79

Ab $t = 0$ beginnt der Verlauf mit der Steigung $0 \frac{\text{V}}{\text{sec}}$; der Endwert für $t \rightarrow \infty$ ist -20 V .

Ü 42: a.) $U_{C0} = u_C(0^-) = u_C(0^+) = \frac{U_0}{2} = 40 \text{ V}$; $I_{L0} = i_L(0^-) = i_L(0^+) = \frac{U_0}{2R} = 4 \text{ mA}$

MGL.: $u_L + u_C = L \cdot i'_L + u_C = 0$; KPGl.: $i_L = i_R + i_C = \frac{u_C}{R} + C \cdot u'_C$

DGL in Normalform:
$$u''_C + \frac{1}{R_1 C} \cdot u'_C + \frac{1}{LC} \cdot u_C = 0 \quad ; \quad u''_C + p \cdot u'_C + q \cdot u_C = 0$$

Mit den gegebenen Bauelementewerten erhält man $p = 100 \frac{1}{\text{sec}}$; $q = 1.0025 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{sec}^2}$ und damit nach Seite 60 für die Diskriminante der quadratischen Gleichung $D = \frac{p^2}{4} - q = -10^6 \frac{1}{\text{sec}^2}$.

Die beiden konjugiert komplexen Eigenwerte liegen bei diesem schwingungsfähigen System deshalb bei

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm j\sqrt{-D} = \alpha \pm j\beta = [-50 \pm j1000] \frac{1}{\text{sec}}$$

woraus sich nach Seite 61 (Fall 3) der folgende Ansatz für die Lösung der homogenen DGL ergibt.

$$u_{Ch}(t) = K \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta \cdot t + \varphi) = K \cdot e^{-50 \cdot t/\text{sec}} \cdot \sin(1000 \cdot t/\text{sec} + \varphi)$$

Die beiden Unbekannten K und φ werden unten mit Hilfe der Anfangsbedingungen berechnet.

Da bei $t > 0$ keine äußere Quelle wirkt, entfällt die spezielle Lösung d.h. $u_{Cs}(t) = 0$.

Deshalb erhält man hier als vollständige Lösung der DGL $u_C(t) = u_{Ch}(t)$ und somit

$$u_C(t) = K \cdot e^{-50 \cdot t/\text{sec}} \cdot \sin(1000 \cdot t/\text{sec} + \varphi).$$

Für die weiteren Berechnungen wird auch die Ableitung der Spannung nach der Zeit benötigt:

$$u'_C(t) = -\frac{50K}{\text{sec}} e^{-50 \cdot t/\text{sec}} \cdot \sin(1000 \cdot t/\text{sec} + \varphi) + K \cdot e^{-50 \cdot t/\text{sec}} \cdot \frac{1000}{\text{sec}} \cdot \cos(1000 \cdot t/\text{sec} + \varphi)$$

Anfangswerte und deren Berücksichtigung:

Aus der Lösung der DGL folgt $u_C(t = 0^+) = U_{C0} = 40 \text{ V} = K \cdot \sin(\varphi)$. (1)

Um den unter a.) ermittelten Anfangswert I_{L0} ohne Umrechnung in $u'_C(t = 0^+)$ verwenden zu können, betrachtet man die KPGl. für $t = 0^+$:

$$I_{L0} = \frac{u_C}{R} + C \cdot u'_C = \frac{K \cdot \sin(\varphi)}{10 \text{ k}\Omega} - \frac{50K \cdot 10^{-6} \text{ F}}{\text{sec}} \cdot \sin(\varphi) + \frac{1000K \cdot 10^{-6} \text{ F}}{\text{sec}} \cdot \cos(\varphi) = 4 \text{ mA} \quad (2)$$

Gl. (1) wird nun an zwei Stellen in Gl. (2) eingesetzt und man erhält somit

$$I_{L0} = \frac{40 \text{ V}}{10 \text{ k}\Omega} + 10^{-6} \text{ F} \cdot \left[-\frac{50 \cdot 40 \text{ V}}{\text{sec}} + \frac{1000K}{\text{sec}} \cdot \cos(\varphi) \right] = 4 \text{ mA} .$$

Aus $[\dots] = 0$ folgt mit $K = \frac{40 \text{ V}}{\sin(\varphi)} \Rightarrow \tan(\varphi) = 20$; $\varphi = 87.138^\circ$; $K = 40.050 \text{ V}$.

Die gesuchte Zeitfunktion lautet
$$u_C = 40.050 \text{ V} \cdot e^{-50 \cdot t/\text{sec}} \cdot \sin(1000 \cdot t/\text{sec} + 87.138^\circ)$$
.

Ü 43: a.) TP, da $|\underline{G}(s \rightarrow 0)| = \frac{2}{3}$; $|\underline{G}(s \rightarrow \infty)| \rightarrow 0$, Grad n=2 da ein L und ein C vorhanden. Andere Betrachtung: Dämpfung hoher Frequenzen sowohl durch Längs-L als auch durch Quer-C.

b.)
$$\underline{G}(s) = \frac{U_C(s)}{U_E(s)} = \frac{\underline{Z}}{r_1 + s\underline{l} + \underline{Z}} = \frac{\frac{r_2}{1 + sr_2c}}{r_1 + s\underline{l} + \frac{r_2}{1 + sr_2c}} = \frac{r_2}{r_1 + r_2 + s(1 + r_1r_2c) + s^2r_2lc}$$

c.) Mit $r_1 = 1$; $r_2 = 2$ erhält man
$$\underline{G}(s) = \frac{2}{3 + s \cdot (1 + 2c) + s^2 2lc} = \frac{2}{3 + 11s + 24s^2}$$

Vergleicht man die Nennerkoeffizienten, erhält man $1 + 2c = 11$; $2lc = 24$ und daraus die quadratische Gleichung $l^2 - 11l + 24 = 0$ mit den Lösungen $l_1 = 3$; $l_2 = 8$.

Damit berechnet man die normierten Werte für die Kapazität $c_1 = 4$; $c_2 = 1.5$.

d.)
$$\underline{G}(s) = \frac{U_C(s)}{U_E(s)} = \frac{2}{3 + 11s + 24s^2} \Rightarrow U_C(s) \cdot (3 + 11s + 24s^2) = 2 \cdot U_E(s)$$

Daraus gewinnt man mit $s \rightarrow \frac{d}{dt}$ die gesuchte DGL $3u_C + 11u'_C + 24u''_C = 2u_E$.

Ü 44: a.) $\underline{U}_A(\omega \rightarrow \infty) = \underline{U}_E$; $\underline{U}_A(\omega \rightarrow 0) = 0$: Hochpass vom Grad $n=2$.

b.) Bei $\omega = 0$ wird (wegen der Längskapazität und der Querinduktivität) kein Signal vom Eingang zum Ausgang übertragen d.h. die Verstärkung ist gleich Null. $\underline{G}(s = 0) = 0$: Deshalb gibt es eine doppelte Nullstelle im Ursprung bei $s=0$.

$$c.) \underline{G}(s) = \frac{\underline{U}_A(s)}{\underline{U}_E(s)} = 1 \cdot \frac{s^2}{(s+5)^2} = \frac{s^2}{s^2 + 10s + 25} = \frac{sl}{sl + r + \frac{1}{sc}} = \frac{s^2lc}{s^2lc + src + 1}$$

$$d.) \underline{G}(s) = \frac{\underline{U}_A(s)}{\underline{U}_E(s)} = \frac{s^2}{s^2 + 10s + 25} = \frac{s^2}{s^2 + s\frac{r}{l} + \frac{1}{lc}}; \text{ Koeffizientenvergleich: } l = 0.1; \quad c = 0.4$$

$$e.) \underline{G}(s) = \frac{\underline{U}_A(s)}{\underline{U}_E(s)} = \frac{s^2}{s^2 + 10s + 25} \Rightarrow \underline{U}_A(s) \cdot (s^2 + 10s + 25) = \underline{U}_E(s) \cdot s^2$$

Daraus gewinnt man mit $s \rightarrow \frac{d}{dt}$ die gesuchte DGL $u''_A + 10 \cdot u'_A + 25 \cdot u_A = u''_E$.

Ü 45: a.) Bei dieser besonderen Anordnung (drei Kapazitäten bilden einen Knoten) ist die Anzahl der Blindelemente größer als der Grad von $\underline{z}(s)$. Solche Netzwerke nennt man 'nicht kanonisch'.

$$b.) \underline{z}_a(s) = s + \frac{1}{5s} = \frac{5s^2 + 1}{5s} = \frac{1}{\underline{y}_a(s)}; \quad \underline{y}_b(s) = \underline{y}_a(s) + 2s = \frac{s(10s^2 + 7)}{5s^2 + 1} = \frac{1}{\underline{z}_b(s)}$$

$$\underline{z}(s) = \underline{z}_b(s) + \frac{1}{10s} = \frac{5s^2 + 1}{s(10s^2 + 7)} + \frac{1}{10s} = \frac{10s(5s^2 + 1) + s(10s^2 + 7)}{s(10s^2 + 7) \cdot 10s} = \frac{60s^2 + 17}{s(100s^2 + 70)}$$

c.) Zählerpolynom : Grad $n_z = 2$, Konstante $Q_z = 60$.

Nennerpolynom : Grad $n_n = 3$, Konstante $Q_n = 100$. $\Rightarrow Q = \frac{Q_z}{Q_n} = 0.6$

Nullstellen aus $60s^2 + 17 = 0$: $s_{0\ 1,2} = \pm j \sqrt{\frac{17}{60}} = \pm j 0.5323$;

$s_{0\ 3} \rightarrow \infty$. Diese Nullstelle entsteht durch den Gradunterschied.

Polstellen aus $s(100s^2 + 70) = 0$: $s_{\infty\ 1,2} = \pm j \sqrt{\frac{70}{100}} = \pm j 0.8367$

$s_{\infty\ 3} = 0$. Diese Polstelle liegt im Ursprung der s - Ebene.

Da in dem betrachteten Netzwerk keine ohmschen Widerstände enthalten sind, spricht man von einem 'Reaktanznetzwerk'. Alle (endlichen) Pol- und Nullstellen liegen in diesem Fall auf der imaginären Achse.

d.) Normierte Parallelresonanz(kreis)frequenz ($\underline{z}(j\omega) \rightarrow \infty$): $\Omega_P = 0.8367$

Normierte Serienresonanz(kreis)frequenz ($\underline{z}(j\omega) = 0$): $\Omega_S = 0.5323$

$$\underline{Ü 46:} \quad a.) \underline{G}(s) = \frac{\underline{U}_A(s)}{\underline{U}_E(s)} = \frac{1}{\frac{sC}{R+sL+\frac{1}{sC}}} = \frac{1}{1 + sRC + s^2LC}$$

$$b.) \underline{G}(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2LC + j\omega RC} = \frac{Z(j\omega)}{N(j\omega)} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

$\underline{G}(j\omega)$ wird imaginär für $1 = \omega_0^2LC$; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ [Resonanzkreisfrequenz]

$$c.) \varphi(j\omega) = \varphi_Z(j\omega) - \varphi_N(j\omega) = 0^\circ - \varphi_N(j\omega) = 0^\circ - \arctan \frac{\text{IM}[N(j\omega)]}{\text{RE}[N(j\omega)]} = -\arctan \frac{\omega RC}{1 - \omega^2LC}$$

ω	$ \underline{G}(j\omega) $	$\text{IM}[N(j\omega)]$	$\text{RE}[N(j\omega)]$	$\Delta\varphi$	$\varphi_N(j\omega)$	$\varphi(j\omega)$
0	1	0	1	0°	0°	0°
$\rightarrow \omega_0$	$\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$	> 0	$\rightarrow 0$	0°	$+90^\circ$	-90°
$\rightarrow \infty$	0	> 0	< 0	-180°	0°	-180°

$\Delta\varphi$: Korrekturwinkel für den quadrantenrichtigen Nebenwert des arctan, wenn $\text{RE}[N(j\omega)] < 0$.

Ü 47: a.) Umformen in Produktform und PBZ für einfache Polstellen:

$$\underline{A}_1(s) = \frac{2.5}{s \cdot 2 \cdot (s + 1/2) \cdot 3 \cdot (s + 1/3)} = \frac{2.5}{s} + \frac{5}{s + 1/2} - \frac{7.5}{s + 1/3}$$

Gliedweise Rücktransformation: $a_1(t) = [2.5 + 5 \cdot e^{-t/2} - 7.5 \cdot e^{-t/3}] \cdot \sigma(t)$

b.) PBZ mit mehrfachem Pol : $\underline{A}_2(s) = \frac{r_{1,1}}{s+1} + \frac{r_{1,2}}{(s+1)^2} + \frac{r_2}{s+3} = \frac{25}{s+1} + \frac{50}{(s+1)^2} + \frac{-25}{s+3}$

Gliedweise Rücktransformation: $a_2(t) = [25 \cdot e^{-t} + 50 \cdot t \cdot e^{-t} - 25 \cdot e^{-3t}] \cdot \sigma(t)$

Ü 48: a.) $\underline{G}(s) = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1 \cdot sL}{R_1 + sL}} \cdot \frac{R_2 \cdot (R_1 + sL)}{R_1 R_2 + sL(R_1 + R_2)} = \frac{R_1 R_2 \cdot (1 + s \frac{L}{R_1})}{R_1 R_2 \cdot (1 + sL \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2})}$

$\underline{G}(s) = \frac{1 + s \cdot \tau_1}{1 + s \cdot \tau_2}$; Zeitkonstanten : $\tau_1 = \frac{L}{R_1} = 10^{-3} \text{ sec}$; $\tau_2 = \frac{L}{R_1 || R_2} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$

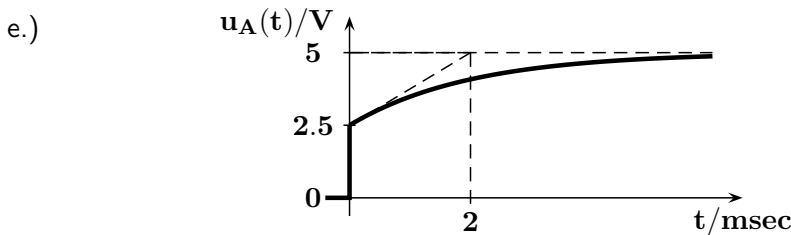
c.) Die Anwendung der Grenzwertsätze auf $\underline{U}_A(s) = \underline{U}_E(s) \cdot \underline{G}(s) = \frac{5 \text{ V}}{s} \cdot \frac{1 + s\tau_1}{1 + s\tau_2}$ ergibt:

$u_A(t \rightarrow 0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot \underline{U}_A(s)] = 5 \text{ V} \cdot \frac{\tau_1}{\tau_2} = 2.5 \text{ V}$; $u_A(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot \underline{U}_A(s)] = 5 \text{ V}$

d.) PBZ hier ohne Rechnung möglich: $\underline{U}_A(s) = \frac{5 \text{ V}}{s} \cdot \frac{1 + s\tau_1}{1 + s\tau_2} = \frac{5 \text{ V}}{s(1 + s\tau_2)} + \frac{5 \text{ V} \cdot \tau_1}{1 + s\tau_2}$.

Die Rücktransformation nach Seite 63/64 (Nr. 13 und Nr. 8) ergibt die gesuchte Zeitfunktion.

$u_A(t) = 5 \text{ V}(1 - e^{-t/\tau_2}) \cdot \sigma(t) + 5 \text{ V} \frac{\tau_1}{\tau_2} e^{-t/\tau_2} \cdot \sigma(t) = [5 \text{ V} - 2.5 \text{ V} \cdot e^{-t/2 \text{ msec}}] \cdot \sigma(t)$



Ü 49: a.) $\underline{U}_A = \underline{U}_E \cdot \frac{1}{R_1 + \frac{1}{sC}} - \underline{U}_E \cdot \frac{R}{2R} = \underline{U}_E \cdot (\frac{1}{1 + sR_1C} - \frac{1}{2}) = \underline{U}_E \cdot \frac{2 - (1 + sR_1C)}{2(1 + sR_1C)}$

$\underline{U}_A = \underline{U}_E \cdot \frac{1 - sR_1C}{2(1 + sR_1C)}$; Daraus folgt $\underline{G}(s) = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = \frac{1 - sR_1C}{2(1 + sR_1C)} = \frac{1 - s\tau}{2(1 + s\tau)}$

Die Zeitkonstanten im Zähler und Nenner sind gleich $\tau = R_1C = 10 \text{ msec}$.

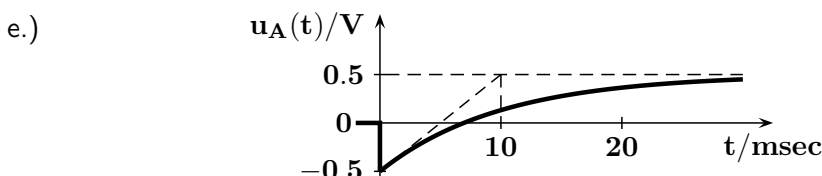
b.) d.) $\underline{U}_A(s) = \underline{U}_E(s) \cdot \underline{G}(s) = \frac{1 \text{ V}}{s} \cdot \frac{1 - s\tau}{2(1 + s\tau)}$ PBZ: $\underline{U}_A(s) = \frac{0.5 \text{ V}}{s(1 + s\tau)} - \frac{0.5 \text{ V} \cdot \tau}{1 + s\tau}$

Die Rücktransformation nach Seite 63/64 (Nr. 13 und Nr. 8) ergibt die gesuchte Zeitfunktion.

$u_A(t) = 0.5 \text{ V}(1 - e^{-t/\tau}) \cdot \sigma(t) - 0.5 \text{ V} \cdot \frac{\tau}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} \cdot \sigma(t) = [0.5 \text{ V} - 1 \text{ V} \cdot e^{-t/10 \text{ msec}}] \cdot \sigma(t)$

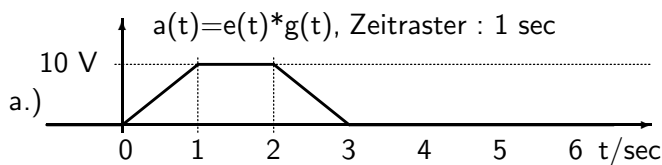
c.) Anwendung der Grenzwertsätze auf $\underline{U}_A(s) = \frac{1 \text{ V}}{s} \cdot \frac{1 - s\tau}{2(1 + s\tau)}$ ergibt:

$u_A(t \rightarrow 0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot \underline{U}_A(s)] = -0.5 \text{ V}$; $u_A(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot \underline{U}_A(s)] = +0.5 \text{ V}$

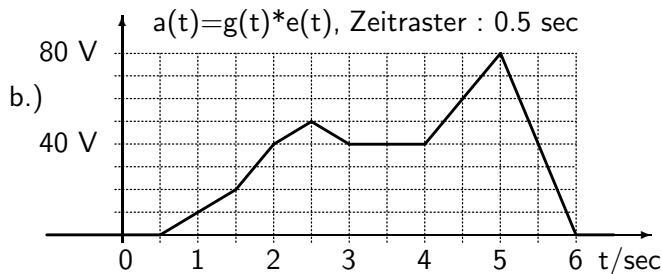


Ü 50: a.) $\underline{G}(s) = \frac{K \cdot s}{s^2 + 10s + 25} \Rightarrow \underline{G}(j\omega) = \frac{j\omega \cdot K}{25 - \omega^2 + j10\omega} \Rightarrow \underline{G}(j5) = \frac{j5 \cdot K}{j50} = \frac{K}{10}$
 $\underline{G}(j5) = 10^{-\frac{18,416 \text{ dB}}{20 \text{ dB}}} = 0.12 \Rightarrow K = 1.2$; b.) Da $\underline{G}(j5)$ reell und positiv ist, gilt $\varphi(j5) = 0^\circ$
 c.) Nullstellen bei $s_{01} = 0$; $s_{02} \rightarrow \infty$; Polstellen bei $s_{\infty 1,2} = -5$ (doppelt)
 d.) Die Lage der beiden Nullstellen zeigt, dass bei tiefen Frequenzen ($s \rightarrow 0$) und bei hohen Frequenzen ($s \rightarrow \infty$) die Verstärkung Null ist. Es handelt sich deshalb um ein Bandpassfilter vom Grad $n=2$.

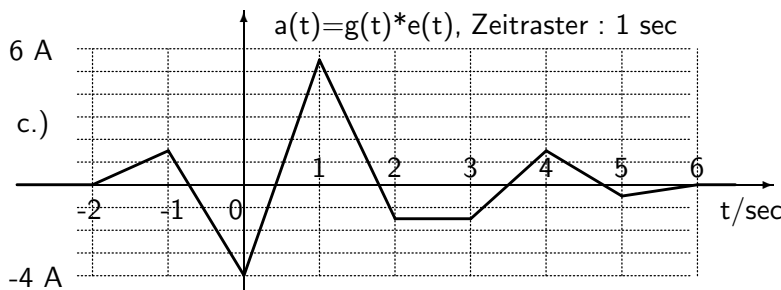
Ü 51: a.) Bei Funktionen mit bereichsweise konstanten Werten kann man das Faltungsintegral auf die Berechnung bewerteter 'Überlappungsflächen' von $e(t)$ und $g(t)$ zurück führen. Dazu ist es erforderlich, $e(t)$ oder $g(t)$ umzuklappen. Das Zeitraster wählt man so, dass alle Signaländerungen erfasst werden. Die Punkte der berechneten Werte auf dem Zeitraster kann man dann mit Geradenstücken verbinden.



Für $t < 0 \text{ sec}$ und $t > 3 \text{ sec}$:
Keine Überlappung $\Rightarrow a(t) = 0$
 Für $1 \text{ sec} \leq t \leq 2 \text{ sec}$: Volle Überlappung
 $a(t) = 0.4 \text{ V} \cdot 25 \frac{1}{\text{sec}} \cdot 1 \text{ sec} = 10 \text{ V}$



Für $t < 0.5 \text{ sec}$ und $t > 6 \text{ sec}$:
Keine Überlappung $\Rightarrow a(t) = 0$
 Für $t = 2.5 \text{ sec}$ gilt beispielsweise:
 $a(t) = 10 \text{ V} \cdot 2 \frac{1}{\text{sec}} \cdot 0.5 \text{ sec} +$
 $+ 10 \text{ V} \cdot 4 \frac{1}{\text{sec}} \cdot 1 \text{ sec} = 50 \text{ V}$



Für $t < -2 \text{ sec}$ und $t > 6 \text{ sec}$:
Keine Überlappung $\Rightarrow a(t) = 0$
 Für $t = 1 \text{ sec}$ gilt beispielsweise:
 $a(t) = 1 \text{ A} \cdot 3 \frac{1}{\text{sec}} \cdot 1 \text{ sec} +$
 $+ (-1 \text{ A}) \cdot (-2 \frac{1}{\text{sec}}) \cdot 1 \text{ sec} +$
 $+ 0.5 \text{ A} \cdot 1 \frac{1}{\text{sec}} \cdot 1 \text{ sec} = 5.5 \text{ A}$

Ü 52: a.) $u_E(t) = \begin{cases} 0 \text{ V} & : t \leq 0 \\ 2 \frac{\text{V}}{\text{sec}} \cdot t & : t > 0 \end{cases}$; $g(t) = \frac{2.5}{\text{sec}} \cdot e^{-t/2 \text{ sec}} \cdot \sigma(t)$

Berechnung mit $u_A(t) = \int_{\tau=0}^t u_E(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau$ da $u_E(t)$ die einfachere Zeitfunktion ist.

$$u_A(t) = \int_{\tau=0}^t \frac{2 \text{ V}}{\text{sec}} \cdot (t-\tau) \cdot \frac{2.5}{\text{sec}} \cdot e^{-\tau/2 \text{ sec}} d\tau = \frac{5 \text{ V}}{\text{sec}^2} \left[t \cdot \int_{\tau=0}^t e^{-\tau/2 \text{ sec}} d\tau - \int_{\tau=0}^t \tau \cdot e^{-\tau/2 \text{ sec}} d\tau \right]$$

$$u_A(t) = \frac{5 \text{ V}}{\text{sec}^2} \left[t \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2 \text{ sec}}} \cdot e^{-\tau/2 \text{ sec}} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} - \frac{5 \text{ V}}{\text{sec}^2} \left[\frac{e^{-\tau/2 \text{ sec}}}{(-\frac{1}{2 \text{ sec}})^2} \cdot (-\frac{\tau}{2 \text{ sec}} - 1) \right]_{\tau=0}^{\tau=t}$$

$$u_A(t) = -20 \text{ V} + \frac{10 \text{ V}}{\text{sec}} \cdot t + 20 \text{ V} \cdot e^{-t/2 \text{ sec}}$$

b.) Nach Seite 63 Nr. 5 erhält man aus $g(t)$ die Ü.- Fkt. $\underline{G}(s) = \frac{2.5}{s+0.5} \frac{1}{\text{sec}}$.

c.) Nach Seite 63 Nr. 3 erhält man aus $u_E(t)$ die Bildfunktion $\underline{U}_E(s) = \frac{2 \frac{\text{V}}{\text{sec}}}{s^2}$.

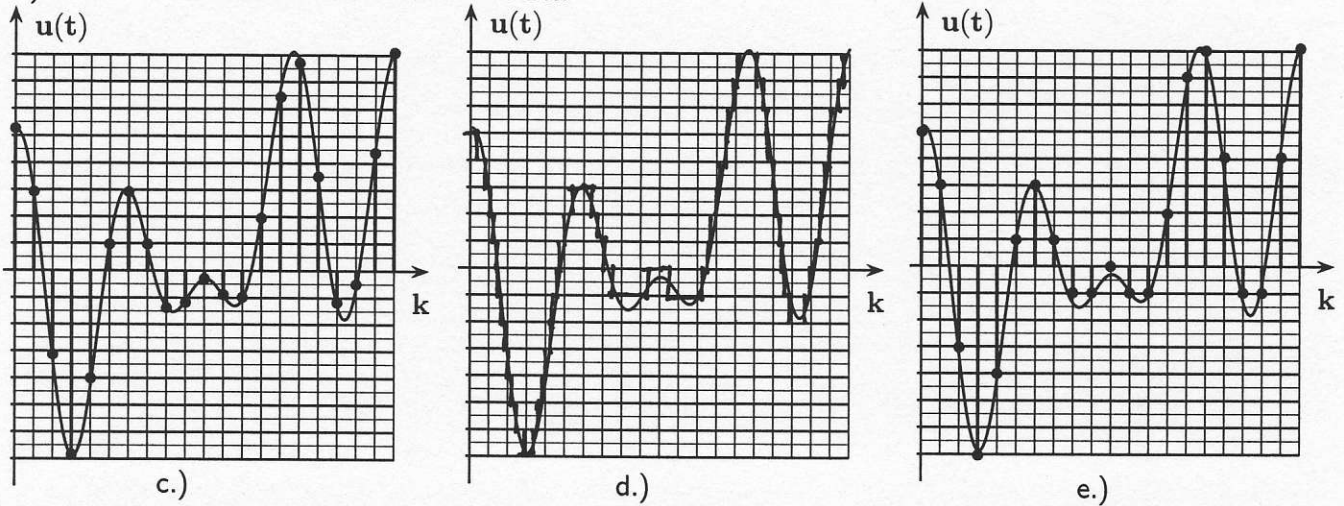
d.) $\underline{U}_A(s) = \underline{U}_E(s) \cdot \underline{G}(s) = \frac{5 \frac{\text{V}}{\text{sec}^2}}{s^2(s+0.5) \frac{1}{\text{sec}}}$ e.) $\underline{U}_A(s) = \frac{r_{0,1}}{s^1} + \frac{r_{0,2}}{s^2} + \frac{r_1}{s+0.5} \frac{1}{\text{sec}}$

Berechnung der Residuen nach Seite 71 b) : $r_{0,1} = -20 \text{ V}$; $r_{0,2} = 10 \frac{\text{V}}{\text{sec}}$; $r_1 = 20 \text{ V}$

Die gliedweise Rücktransformation ergibt $u_A(t) = [-20 \text{ V} + \frac{10 \text{ V}}{\text{sec}} \cdot t + 20 \text{ V} \cdot e^{-t \cdot 0.5/\text{sec}}] \cdot \sigma(t)$.

Ü 53: a.) Ja, da die höchste sichtbare Frequenz pro Periode ca. viermal abgetastet wird.

b.) $n = 16$ darstellbare Werte $\Rightarrow N = 4$ Bit.



Ü 54: a.) Unipolare Spannung mit $U_{max} = 10\text{ V}$; $N = 12 \Rightarrow n = 2^{12} - 1 = 4095$

$\Delta U = \frac{U_{max}}{n} = 2.442\text{ mV}$; $\Delta U_q = 0.5 \cdot \Delta U = 1.221\text{ mV}$; 0 V (2.442 mV) 10 V

b.) Bipolare Spannung mit $U_{max} = 5\text{ V}$; $N = 16 \Rightarrow n = 2^{16} - 1 = 65\,535$

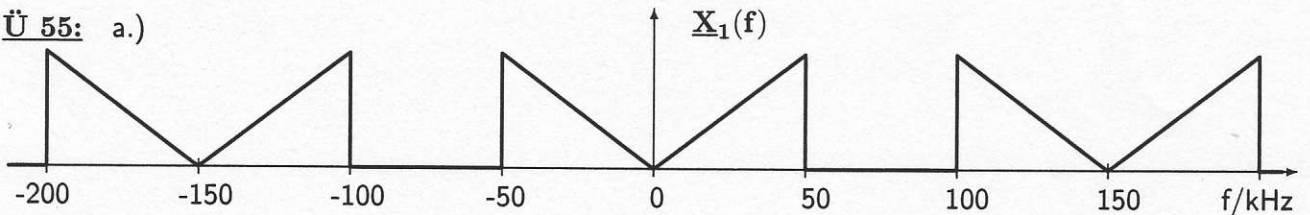
$\Delta U = \frac{2U_{max}}{2^N} = 152.59\text{ }\mu\text{V}$; $\Delta U_q = 0.5 \cdot \Delta U = 76.294\text{ }\mu\text{V}$; $-4.999\,847\text{ V}$ ($152.59\text{ }\mu\text{V}$) 5 V

c.) Bipolare Spannung mit $U_{min} = -15\text{ V}$; $\Delta U_q \leq 1\text{ mV}$; $\Rightarrow \Delta U = 2\Delta U_q \leq 2\text{ mV}$

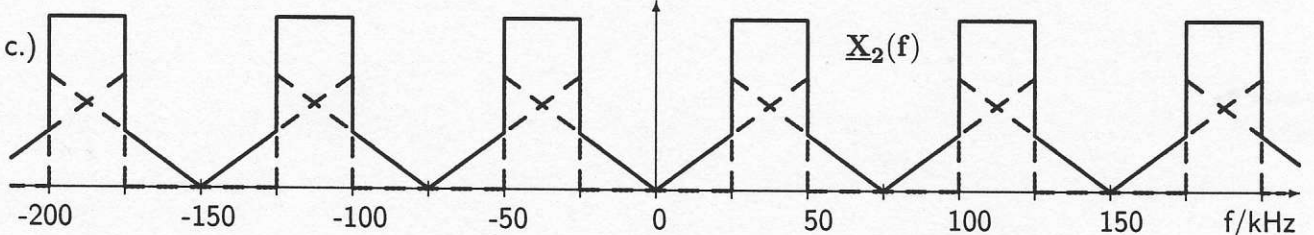
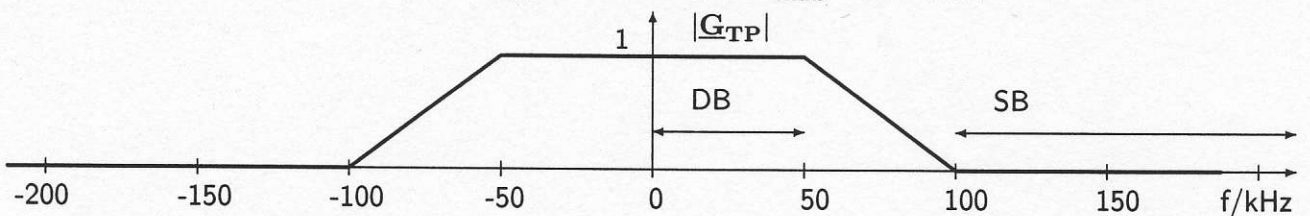
$2^N \geq \frac{2U_{max}}{\Delta U} = 15\,002$; $N = 14$; $n = 16\,383$; $\Delta U = \frac{-U_{min}}{(n-1)/2} = 1.8313\text{ mV}$

$\Delta U_q = 0.5 \cdot \Delta U = 915.64\text{ }\mu\text{V}$; -15 V (1.8313 mV) 15.0018313 V

Ü 55: a.)



b.) Das Abtasttheorem ist erfüllt, da $f_{S1} = 150\text{ kHz} > 2 \cdot f_{max} = 100\text{ kHz}$



d.) Das Abtasttheorem ist nicht erfüllt, da $f_{S2} = 75\text{ kHz} < 2 \cdot f_{max} = 100\text{ kHz}$

Die Überlappungen im Spektrum sind deutlich zu sehen. Abhilfe: Abtastung mit $f_S > 100\text{ kHz}$.

Ü 56:

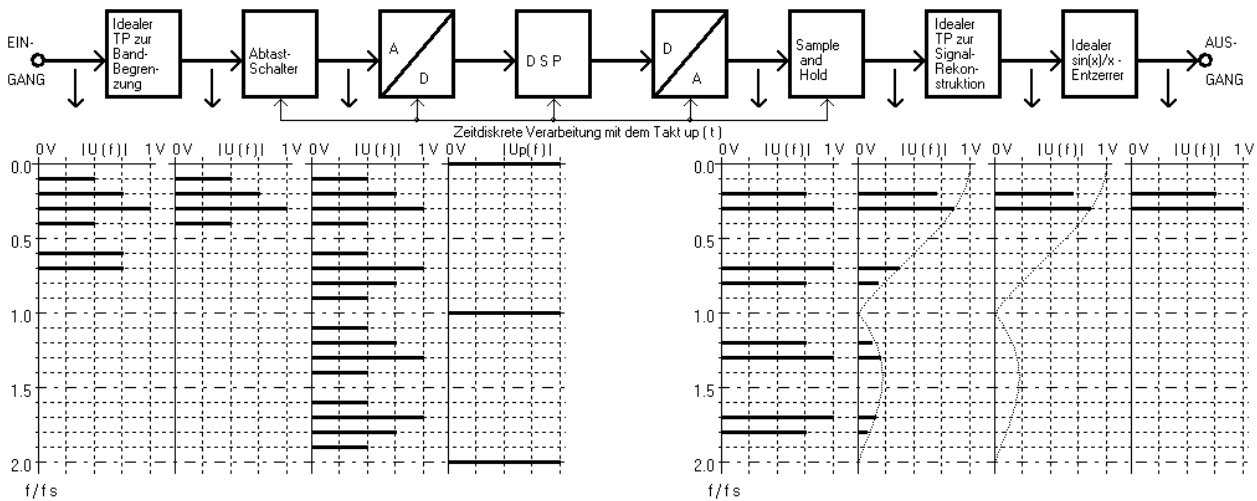
Durch die Abtastung entstehen die Frequenzen $f = \mu \cdot f_S \pm f_{\text{ein}}$; $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Betrachtet man nur die positive Frequenzen, fallen für $f_{\text{ein}} = 10 \text{ kHz}, 20 \text{ kHz}, 30 \text{ kHz}$ (hier ist das Abtasttheorem erfüllt) nur die Anteile für $\mu = 0$ mit dem positiven Vorzeichen in den Durchlassbereich des Tiefpassfilters: $f_a = f_{\text{ein}} = 10 \text{ kHz}, 20 \text{ kHz}, 30 \text{ kHz}$.

Bei $f_{\text{ein}} = 50 \text{ kHz}, 60 \text{ kHz}, 70 \text{ kHz}$ ist dagegen das Abtasttheorem nicht erfüllt. Hier fallen nur die Anteile für $\mu = 1$ mit dem negativen Vorzeichen in den Durchlassbereich des Tiefpassfilters: $f_a = f_S - f_{\text{ein}} = 30 \text{ kHz}, 20 \text{ kHz}, 10 \text{ kHz}$.

Ü 57:

Nur die Frequenzen $f_1 = 200 \text{ Hz}, f_2 = 300 \text{ Hz}$ (im Bild sind diese Frequenzen auf die Abtastfrequenz $f_S = 1 \text{ kHz}$ bezogen und liegen bei $f_1/f_S = 0.2, f_2/f_S = 0.3$) fallen in den Durchlassbereich des Bandpassfilters. Als Folge der zeitdiskreten Darstellung treten auch die periodischen Wiederholungen $\mu \cdot f_S \pm f_1, \mu \cdot f_S \pm f_2, \dots$ mit $\mu = \pm 1, \pm 2, \dots$ auf.



Ü 58:

a.) $G_{\text{entz}}(s) = \frac{1.0000}{1 + s \cdot 0.76456 + s^2 \cdot 1.9209}$

b.) Der maximale Betragsfehler wird durch den Entzerrer von **2.420 dB** auf **0.003 dB** reduziert.

c.) $G_{\text{entz}}(s) = \frac{1.0000}{1 + s \cdot 0.76456 + s^2 \cdot 1.9209} = \frac{1}{1 + src + s^2lc} \Rightarrow r = 0.76456 ; l = 1.9209$

d.) $C_B = \frac{1}{2\pi f_B R_B} = 723.43 \text{ pF} ; C = c \cdot C_B = 723.43 \text{ pF} ; R = r \cdot R_B = 1.6820 \text{ k}\Omega$

$L_B = \frac{R_B}{2\pi f_B} = 3.5014 \text{ mH} ; L = l \cdot L_B = 6.7259 \text{ mH}$ Schaltung siehe z.B. Seite 49.

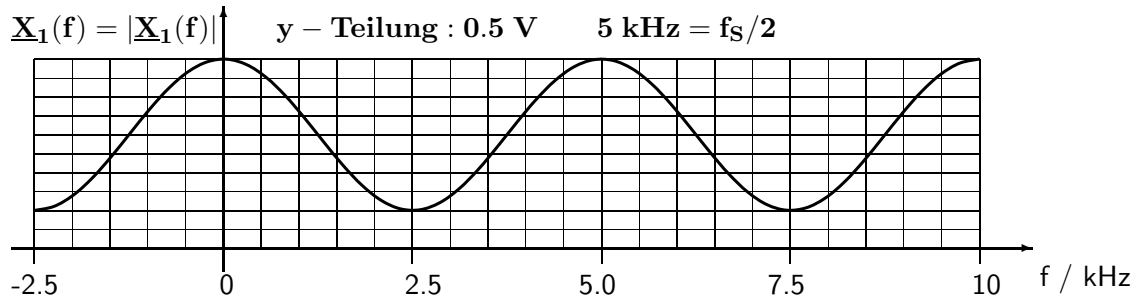
Ü 59: Bei der Signalfrequenz $f_{\text{ein}} = 1 \text{ kHz}$ verursachen die Verzögerungselemente eine Phasenverschiebung von je $\varphi = -2 \cdot \pi \cdot f_{\text{ein}} \cdot T_S = -2 \cdot \pi \cdot 10^3 \frac{1}{\text{sec}} \cdot \frac{1}{4} 10^{-3} \text{ sec} = -\frac{\pi}{2} \hat{=} -90^\circ$.

Da der Betrag der Verstärkung dieser Elemente bei allen Frequenzen gleich Eins ist, erhält man für das Ausgangssignal

$u_A(t) = 1 \cdot \hat{u} \cdot \sin(\omega_{\text{ein}}t + 45^\circ) + 2 \cdot \hat{u} \cdot \sin(\omega_{\text{ein}}t + 45^\circ - 90^\circ) + 1 \cdot \hat{u} \cdot \sin(\omega_{\text{ein}}t + 45^\circ - 180^\circ)$

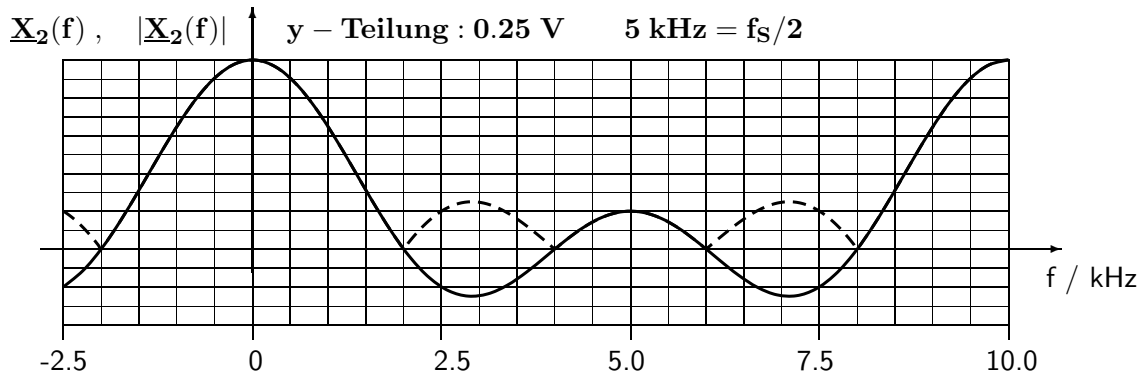
$u_A(t) = \hat{u} \cdot [\sin(\omega_{\text{ein}}t + 45^\circ) - \sin(\omega_{\text{ein}}t + 45^\circ) + 2 \cdot \sin(\omega_{\text{ein}}t - 45^\circ)] = 2 \cdot \hat{u} \cdot \sin(\omega_{\text{ein}}t - 45^\circ)$

Ü 60: a.) $\underline{X}_1(j\omega) = 1 \cdot e^{-j\omega T_S \cdot (-2)} + 3 + 1 \cdot e^{-j\omega T_S \cdot (+2)} = 3 + e^{j2\omega T_S} + e^{-j2\omega T_S} = 3 + 2 \cdot \cos(2\omega T_S)$



b.) $\underline{X}_2(j\omega) = 0.5 \cdot e^{-j\omega T_S \cdot (-2)} + 0.5 \cdot e^{-j\omega T_S \cdot (-1)} + 0.5 + 0.5 \cdot e^{-j\omega T_S \cdot (+1)} + 0.5 \cdot e^{-j\omega T_S \cdot (+2)}$

$\underline{X}_2(j\omega) = 0.5 + 0.5 \cdot (e^{j\omega T_S} + e^{-j\omega T_S}) + 0.5 \cdot (e^{j2\omega T_S} + e^{-j2\omega T_S}) = 0.5 + \cos(\omega T_S) + \cos(2\omega T_S)$



c.) $\underline{X}_3(j\omega) = 2 \cdot e^{-j\omega T_S} + 2 \cdot e^{-j2\omega T_S} + 2 \cdot e^{-j3\omega T_S} + 2 \cdot e^{-j4\omega T_S} + 2 \cdot e^{-j5\omega T_S}$

$\underline{X}_3(j\omega) = 2 \cdot e^{-j3\omega T_S} \cdot [e^{j2\omega T_S} + e^{j\omega T_S} + 1 + e^{-j\omega T_S} + e^{-j2\omega T_S}]$

Das Ergebnis unterscheidet sich von b.) nur um den Faktor 4 und um die Zeitverschiebung um $3T_S$.

Mit $e^{-j3\omega T_S} = \cos(3\omega T_S) - j \sin(3\omega T_S)$ erhält man $\underline{X}_3(j\omega) = \underline{R}_3(j\omega) + j \underline{I}_3(j\omega)$

$\underline{X}_3(j\omega) = 2 \cdot [\cos(3\omega T_S) - j \sin(3\omega T_S)] \cdot [1 + 2 \cdot \cos(\omega T_S) + 2 \cdot \cos(2\omega T_S)]$

d.) $\underline{X}_4(j\omega) = -1 \cdot e^{j2\omega T_S} + 4 \cdot e^{-j\omega T_S} - 1 \cdot e^{-j2\omega T_S} = -2 \cdot \cos(\omega T_S) + 4 \cdot e^{-j\omega T_S}$

Mit der Eulerschen Gleichung erhält man für den letzten Summanden

$4 \cdot e^{-j\omega T_S} = 4 \cdot [\cos(\omega T_S) - j \sin(\omega T_S)]$ und kann dann Real- und Imaginärteil zusammenfassen:

$\underline{X}_4(j\omega) = \underline{R}_4(j\omega) + j \underline{I}_4(j\omega) = 2 \cdot [2 \cdot \cos(\omega T_S) - \cos(2\omega T_S) - j 2 \cdot \sin(\omega T_S)]$

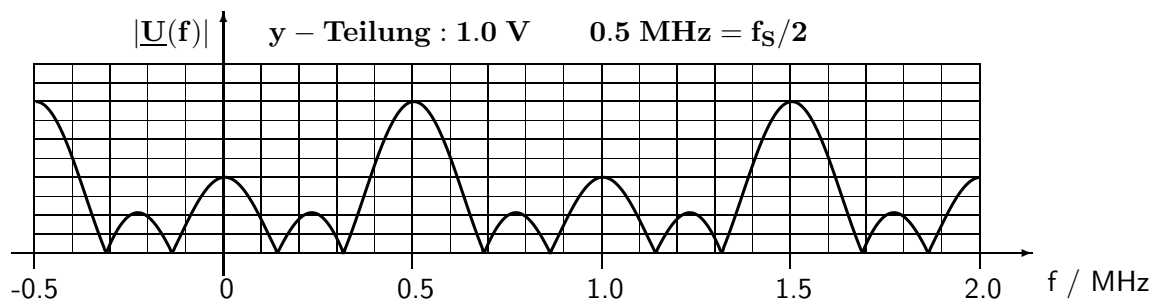
Ü 61: $\underline{U}(j\omega) = 2 \text{ V} \cdot e^{-j\omega T_S} - 1 \text{ V} \cdot e^{-j2\omega T_S} + 2 \text{ V} \cdot e^{-j3\omega T_S} - 1 \text{ V} \cdot e^{-j4\omega T_S} + 2 \text{ V} \cdot e^{-j5\omega T_S}$

$\underline{U}(j\omega) = e^{-j3\omega T_S} \cdot [2 \text{ V} \cdot e^{j2\omega T_S} - 1 \text{ V} \cdot e^{j\omega T_S} + 2 \text{ V} - 1 \text{ V} \cdot e^{-j\omega T_S} + 2 \text{ V} \cdot e^{-j2\omega T_S}]$

$\underline{U}(j\omega) = 2 \text{ V} e^{-j3\omega T_S} [1 - \cos(\omega T_S) + 2 \cos(2\omega T_S)]$; $|\underline{U}(j\omega)| = 2 \text{ V} | 1 - \cos(\omega T_S) + 2 \cos(2\omega T_S) |$

$|U(f = 0.0 \text{ MHz})| = 4 \text{ V}$; $|U(f = 0.5 \text{ MHz})| = 8 \text{ V}$; $|U(f = 1.0 \text{ MHz})| = 4 \text{ V}$

Die Teilfunktionen 2V , $-2\text{V} \cdot \cos(\omega T_S)$, $4\text{V} \cdot \cos(2\omega T_S)$ zeichnen, addieren und Betrag bilden.



Ü 62: $a^n = e^{-t/\tau} = e^{-nT_s/\tau} = [e^{-T_s/\tau}]^n \Rightarrow a = e^{-T_s/\tau}; \ln(a) = -\frac{T_s}{\tau}; \tau = \frac{T_s}{-\ln(a)} = \frac{T_s}{\ln(\frac{1}{a})}$
 Mit den gegebenen Zahlenwerten berechnet man $\tau = \frac{100 \mu\text{sec}}{\ln(\frac{4}{3})} = 347.6 \mu\text{sec}$.

Ü 63: Durch Vergleich bei $t=0$ bzw. bei $n=0$ findet man $\hat{u} = 2 \text{ V}$.

Die Werte der Folge $u[n] = \{ 2 \text{ V}, -1 \text{ V}, 0.5 \text{ V}, -0.25 \text{ V}, \dots \}$ besitzen wechselnde Vorzeichen (wie die Extremalstellen der cosinus-Funktion) und treten im Abstand $T_s = \frac{1}{f_s}$ auf.

Der Periodendauer $T_{\text{ein}} = \frac{1}{f_{\text{ein}}}$ der cosinus-Funktion entsprechen deshalb $2T_s$ und man erhält $T_{\text{ein}} = \frac{1}{f_{\text{ein}}} = 2T_s = \frac{2}{f_s} \Rightarrow f_{\text{ein}} = \frac{f_s}{2} = 100 \text{ kHz}$.

Das Abtasttheorem fordert $f_s > 2 \cdot f_{\text{ein}}$ und ist deshalb hier gerade nicht mehr erfüllt.

Die Abklingzeitkonstante wird wie die Zeitkonstante bei Ü 62 mit $a = |-\frac{1}{2}|$ berechnet:

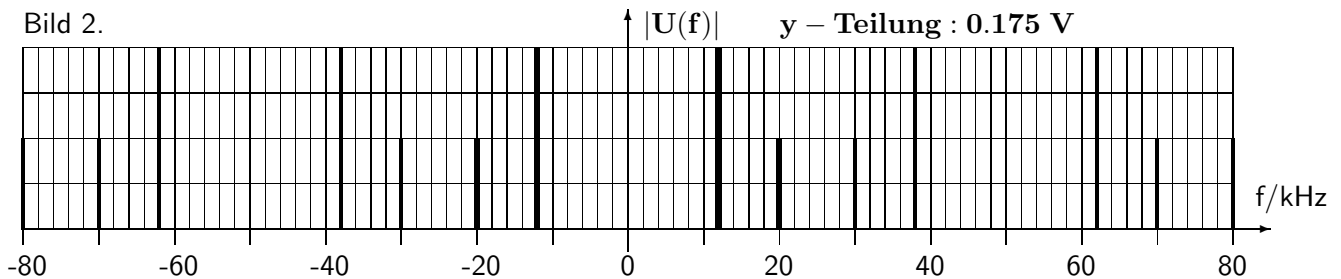
$$T_{\text{ab}} = \frac{T_s}{\ln(\frac{1}{a})} = \frac{5 \mu\text{sec}}{\ln(2)} = 7.213 \mu\text{sec}$$

Ü 64: a.) $f_1 = 12 \text{ kHz}, f_2 = 20 \text{ kHz}; n_p \cdot T_1 = n_q \cdot T_2 = \frac{n_p}{f_1} = \frac{n_q}{f_2} = T_{\text{Wdh}}; \frac{n_q}{n_p} = \frac{5}{3}$

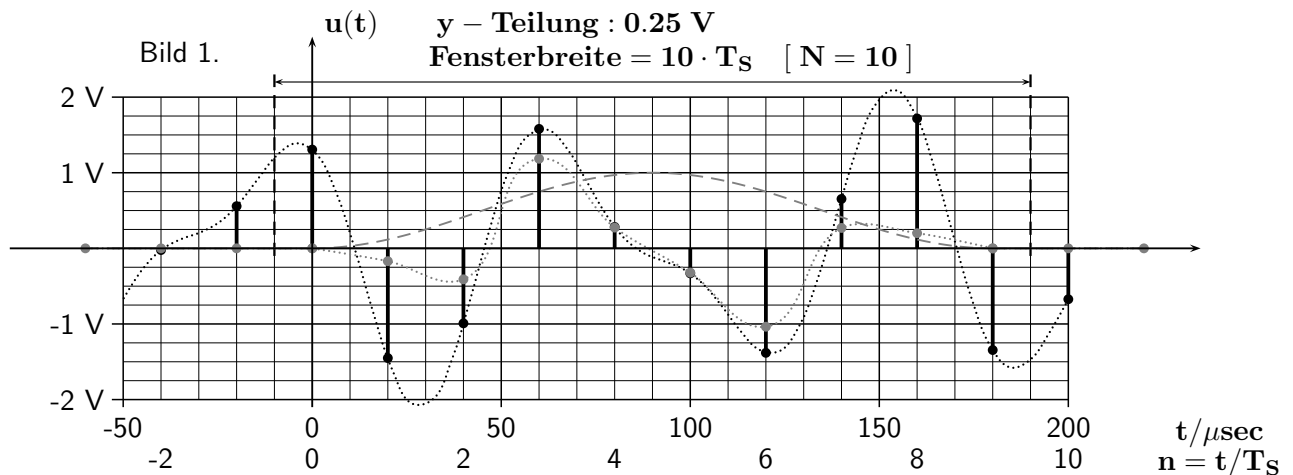
$T_{\text{Wdh}} = 5 \cdot 50 \mu\text{sec} = 3 \cdot 83.33 \mu\text{sec} = 250 \mu\text{sec}$ b.) Umrechnung: Siehe Tabelle Seite 11:

$\hat{u}_1 = 1.4 \text{ V} \Rightarrow |c_1| = 0.7 \text{ V}; \hat{u}_2 = 0.7 \text{ V} \Rightarrow |c_2| = 0.35 \text{ V}$: Dick d.) : Dünn

Bild 2.



c.) Schwarz gezeichnet e.) Grau gezeichnet: $1 \text{ V} \cdot w(t)$, 'gefenstertes' Signal $u(t) \cdot w(t)$.



Ü 65: a.) $a_1[k] = \frac{dp(t)}{dt}|_{t=0} = [2 \cdot c_2 \cdot t + c_1]|_{t=0} = c_1 = \frac{3e[k] - 4e[k-1] + e[k-2]}{2T_s}$

b.) $\underline{A}_1 = \underline{E} \cdot \frac{3 - 4z^{-1} + z^{-2}}{2T_s} \Rightarrow \underline{G}_1(z^{-1}) = \frac{\underline{A}_1}{\underline{E}} = \frac{3 - 4z^{-1} + z^{-2}}{2T_s}; \underline{G}_1(z) = \frac{3z^2 - 4z + 1}{2T_s \cdot z^2}$

c.) Beim idealen Differenzierer gilt Verstärkung $\sim f$; konstante Phasenverschiebung $+90^\circ$ bei allen Frequenzen; die zeitdiskrete Näherung stimmt nur bei tiefen Frequenzen damit überein.

d.) $a_2[k] = \frac{d^2p(t)}{dt^2}|_{t=0} = 2 \cdot c_2 = \frac{e[k] - 2e[k-1] + e[k-2]}{T_s^2}$

e.) $\underline{A}_2 = \underline{E} \cdot \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{T_s^2} \Rightarrow \underline{G}_2(z^{-1}) = \frac{\underline{A}_2}{\underline{E}} = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{T_s^2}; \underline{G}_2(z) = \frac{z^2 - 2z + 1}{T_s^2 \cdot z^2}$

f.) Im Idealfall verläuft hier die Verstärkung $\sim f^2$ und bei allen Frequenzen beträgt die konstante Phasenverschiebung 180° . Im zeitdiskreten Fall ist dies nur bei sehr tiefen Frequenzen festzustellen.

Ü 66: a.) $\underline{A} = \underline{E} \cdot \frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{3} \Rightarrow \underline{G}(z^{-1}) = \frac{\underline{A}}{\underline{E}} = \frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{3}; \quad \underline{G}(z) = \frac{z^2+z+1}{3 \cdot z^2}$

b.) Man ersetzt $z^{-1} = e^{-sT_s} \Rightarrow e^{-j\omega T_s} = e^{-j2\pi f/f_s} = e^{-j2\pi x}$ und $z^{-2} \Rightarrow e^{-j4\pi x}$

$\underline{G}(x) = \frac{1}{3} \cdot [1 + e^{-j2\pi x} + e^{-j4\pi x}] = \frac{1}{3} \cdot [1 + \cos(2\pi x) - j \sin(2\pi x) + \cos(4\pi x) - j \sin(4\pi x)]$

[c.) Mit den Äquivalenzen $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$, $\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$ und mit $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha)$ erhält man für $\alpha = 2\pi x$ nach elementaren Umformungen als Ergebnis

$\underline{G}(x) = \frac{1}{3} \cdot [1 + 2 \cdot \cos(2\pi x)] \cdot [\cos(2\pi x) - j \sin(2\pi x)]$.]

Ü 67: a.) Durch gliedweise Rücktransformation (Seite 109 Nr. 2, Konstante 2; Nr.2, Verschiebung um T_s , Konstante 5; Nr. 6, a=0.5, Konstante 3; Nr. 4, Verschiebung um T_s , Konstante 4) ermittelt man die EIA $g[k] = 2 \cdot \sigma[k] + 5 \cdot \sigma[k-1] + 3 \cdot 0.5^k \cdot \sigma[k] + 4 \cdot (k-1) \cdot \sigma[k-1]$.

Die Berechnung der Werte der EIA ist in der Tabelle dargestellt.

k	$2 \cdot \sigma[k]$	+	$5 \cdot \sigma[k-1]$	+	$3 \cdot 0.5^k \cdot \sigma[k]$	+	$4 \cdot (k-1) \cdot \sigma[k-1]$	=	$g[k]$
0	2	+	0	+	$3 \cdot 1$	+	0	=	5.000
1	2	+	5	+	$3 \cdot 0.5$	+	0	=	8.500
2	2	+	5	+	$3 \cdot 0.25$	+	4	=	11.750
3	2	+	5	+	$3 \cdot 0.125$	+	8	=	15.375

b.) Funktion mit 2 erweitern, damit im Nenner eine 1 entsteht; der Zähler deutet auf Nr. 9 hin.

$\underline{G}(z^{-1}) = \frac{2.8284 z^{-1}}{1 - 1.1314 z^{-1} + 0.64 z^{-2}} = \frac{K \cdot a \cdot z^{-1} \cdot \sin\Phi}{1 - 2 \cdot a \cdot z^{-1} \cdot \cos\Phi + a^2 \cdot z^{-2}}$

Durch drei Koeffizientenvergleiche bestimmt man die Kennwerte

1.) $a^2 = 0.64; \Rightarrow a = 0.8$

2.) $-2 \cdot a \cdot \cos\Phi = -1.1314 \Rightarrow \cos\Phi = 0.7071 \Rightarrow \Phi = 45^\circ$

3.) $K \cdot a \cdot z^{-1} \cdot \sin\Phi = 2.8284 \Rightarrow K = 5$ und erhält die gesuchte EIA

$g[k] = K \cdot a^k \cdot \sin(k\Phi) = [5 \cdot 0.8^k \cdot \sin(k \cdot 45^\circ)] \cdot \sigma[k] = \{0, 2.8284, 3.2, 1.8102\}$

Ü 68: a.) $g[k] = (5-k) \cdot \sigma[k]$ Mit Nr. 2 (Konstante 5) und Nr. 4 (Konstante -1) erhält man

$\underline{G}(z) = \frac{5z}{z-1} - \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{5z^2 - 6z}{z^2 - 2z + 1}; \quad \underline{G}(z^{-1}) = \frac{5 - 6z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}$.

b.) $g[k] = (3 + 2 \cdot [-1]^k) \cdot \sigma[k]$ Mit Nr. 2 (Konstante 3) und Nr. 3 (Konstante 2) erhält man

$\underline{G}(z) = \frac{3z}{z-1} + \frac{2z}{z+1} = \frac{5z^2 + z}{z^2 - 1}; \quad \underline{G}(z^{-1}) = \frac{5 + z^{-1}}{1 - z^{-2}}$.

c.) $g[k] = 10 \cdot 0.9^k \cdot \sigma[k]$ Mit Nr. 6 (a = 0.9, Konstante 10) erhält man

$\underline{G}(z) = \frac{10z}{z-0.9}; \quad \underline{G}(z^{-1}) = \frac{10}{1 - 0.9z^{-1}}$.

Ü 69: a.) $y[k] - 0.2y[k-1] + 0.05y[k-2] = x[k] + x[k-1]$

$\underline{Y}(1 - 0.2z^{-1} + 0.05z^{-2}) = \underline{X}(1 + z^{-1}); \underline{G} = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}} = \frac{1+z^{-1}}{1-0.2z^{-1}+0.05z^{-2}} = \frac{z^2+z}{z^2-0.2z+0.05}$

$Q = 1; \quad \text{NS: } z_{01} = 0; \quad z_{02} = -1; \quad \text{Pole: } z_{\infty 1,2} = 0.1 \pm \sqrt{0.01 - 0.05} = 0.1 \pm j 0.2$

b.) $y[k] = \frac{1}{3}(x[k] + x[k-1] + x[k-2]); \quad \underline{Y} = \underline{X} \cdot \frac{1}{3}(1 + z^{-1} + z^{-2})$

$\underline{G}(z^{-1}) = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}} = \frac{1}{3}(1 + z^{-1} + z^{-2}); \quad \underline{G}(z) = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}} = \frac{z^2+z+1}{3 \cdot z^2}$

$Q = \frac{1}{3}; \quad \text{NS: } z_{01,2} = -0.5 \pm \sqrt{0.25 - 1} = -0.5 \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \text{Pole: } z_{\infty 1,2} = 0$

c.) $y[k] + 0.25y[k-1] = x[k] + 0.5x[k-1]; \quad \underline{Y}(1 + 0.25z^{-1}) = \underline{X}(1 + 0.5z^{-1})$

$\underline{G}(z^{-1}) = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}} = \frac{1+0.5z^{-1}}{1+0.25z^{-1}}; \quad \underline{G}(z) = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}} = \frac{z+0.5}{z+0.25}; \quad Q = 1; \quad \text{NS: } z_0 = -0.5; \quad \text{Pol: } z_{\infty} = -0.25$

d.) $y[k] - \frac{3}{16}y[k-1] + \frac{1}{32}y[k-2] = x[k] + \frac{3}{4}x[k-1] + \frac{1}{8}x[k-2]$

$\underline{Y}(1 - \frac{3}{16}z^{-1} + \frac{1}{32}z^{-2}) = \underline{X}(1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}); \underline{G} = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}} = \frac{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}{1-\frac{3}{16}z^{-1}+\frac{1}{32}z^{-2}} = \frac{z^2+\frac{3}{4}z+\frac{1}{8}}{z^2-\frac{3}{16}z+\frac{1}{32}}$

$Q = 1; \quad \text{NS: } z_{01,2} = -\frac{3}{8} \pm \sqrt{(\frac{3}{8})^2 - \frac{1}{8}} = -\frac{3}{8} \pm \frac{1}{8}; \quad \text{Pole: } z_{\infty 1,2} = \frac{3}{32} \pm \sqrt{(\frac{3}{32})^2 - \frac{1}{32}} = \frac{3}{32} \pm j \frac{\sqrt{23}}{32}$

Ü 70: a.) Im PN-Plan fehlen der Pol bei $z = 0.5 + j 0.5$ und die doppelte Nullstelle bei $z \rightarrow \infty$.

$$\underline{G}(z) = \frac{3 \cdot (z - [-0.5])}{z \cdot (z - [+0.5 + j0.5])(z - [+0.5 - j0.5])} = \frac{3z + 1.5}{z \cdot (z - 0.5 - j0.5)(z - 0.5 + j0.5)}$$

$$\underline{G}(z) = \frac{3z + 1.5}{z^3 - z^2 + 0.5z} \quad ; \quad \underline{G}(z^{-1}) = \frac{Y}{X} = \frac{3z^{-2} + 1.5z^{-3}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

$$Y \cdot (1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}) = X \cdot (3z^{-2} + 1.5z^{-3})$$

$$y[k] - y[k-1] + 0.5 \cdot y[k-2] = 3 \cdot x[k-2] + 1.5 \cdot x[k-3]$$

b.) Im PN-Plan fehlen die Nullstellen bei $z = 0 - j 0.5$ und bei $z = 0.5 + j 0.3$.

$$\underline{G}(z) = \frac{0.15 \cdot (z - [+j0.5])(z - [-j0.5])(z - [+0.5 + j0.3])(z - [+0.5 - j0.3])}{z^4}$$

$$\underline{G}(z) = \frac{0.15 \cdot (z^2 + 0.25)(z^2 - z + 0.34)}{z^4} = \frac{0.15z^4 - 0.15z^3 + 0.0885z^2 - 0.0375z + 0.01275}{z^4}$$

$$\underline{G}(z^{-1}) = \frac{Y}{X} = 0.15 - 0.15 \cdot z^{-1} + 0.0885 \cdot z^{-2} - 0.0375 \cdot z^{-3} + 0.01275 \cdot z^{-4}$$

$$y[k] = 0.15 \cdot x[k] - 0.15 \cdot x[k-1] + 0.0885 \cdot x[k-2] - 0.0375 \cdot x[k-3] + 0.01275 \cdot x[k-4]$$

Ü 71: Aus der Übertragungs-Funktion $\underline{G}(z^{-1}) = \frac{Y}{X} = \frac{2 - 1.5z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}$ folgt die DIFFGL

$$y[k] - 2 \cdot y[k-1] + y[k-2] = 2 \cdot x[k] - 1.5 \cdot x[k-1] \quad ; \quad y[k] = 2y[k-1] - y[k-2] + 2x[k] - 1.5x[k-1]$$

Die schrittweise Berechnung der Signale $y[k]$ durch Auswerten der rechts stehenden DIFFGL ist in den Tabellen dargestellt. Sind keine Anfangswerte gegeben, sind die Ersatzwerte immer Null.

Tabelle für das Signal a.) :

k	y_k	$2y_{k-1}$	$-y_{k-2}$	$2x_k$	$-1.5x_{k-1}$
0	4	0	0	4	0
1	5	8	0	0	-3
2	6	10	-4	0	0
3	7	12	-5	0	0
4	8	14	-6	0	0
5	9	16	-7	0	0

Tabelle für das Signal b.) :

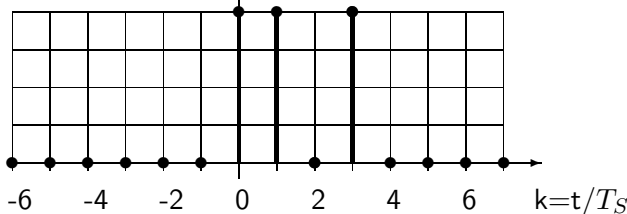
k	y_k	$2y_{k-1}$	$-y_{k-2}$	$2x_k$	$-1.5x_{k-1}$
0	10	0	0	10	0
1	22.5	20	0	10	-7.5
2	37.5	45	-10	10	-7.5
3	55	75	-22.5	10	-7.5
4	75	110	-37.5	10	-7.5
5	97.5	150	-55	10	-7.5

Bei dieser Methode müssen grundsätzlich (beginnend bei $k = 0$) alle Signalwerte bis zu dem Zeitpunkt berechnet werden, der aktuell interessiert.

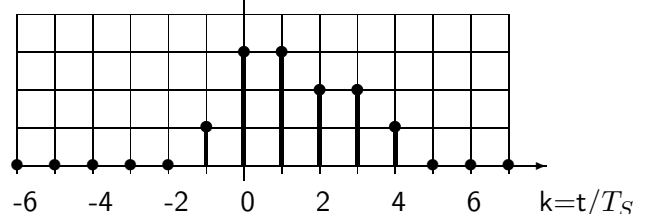
Ü 72: a.) Im Bildbereich $\underline{G}(z^{-1}) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{z^{-4}}{1-z^{-1}} - z^{-2} = \frac{1-z^{-2}+z^{-3}-z^{-4}}{1-z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-3}$

durch eine Polynomdivision, die ohne Rest aufgeht oder im Zeitbereich durch Überlagerung der Abtastwerte eines positiven Einheits-Sprungs bei k_0 , eines negativen Einheits-Sprungs bei $k=4$ und eines negativen Einheits-Impulses bei $k=2$.

a.) $g[k]$ y - Teilung : 0.25



c.) $a[k]$ y - Teilung : 1



b.) Das System ist kausal, da für die EIA gilt: $g[k] = 0$ für $k < 0$.

c.) Aus dem Eingangssignal (es besteht aus drei Impulsen) ergibt sich für das Ausgangssignal die Überlagerung der EIA 1 (Gewicht 1, 1 Schritt früher) + EIA 2 (Gewicht 2, ohne Verschiebung) + EIA 3 (Gewicht 1, 1 Schritt verzögert) : $a[k] = 1 \cdot g[k+1] + 2 \cdot g[k] + 1 \cdot g[k-1]$.

d.) Aus der EIA $g[k]$ folgt die Übertragungs-Funktion $\underline{G}(z^{-1}) = \frac{A}{E} = 1 + z^{-1} + z^{-3}$.

$$\underline{A} = \underline{E} \cdot (1 + z^{-1} + z^{-3}) \Rightarrow a[k] = e[k] + e[k-1] + e[k-3]$$

Ü 73: a.) Die Bildfunktion für einen Sprung der Höhe 3 lautet nach Seite 109 Nr. 2

$$\underline{X}(z^{-1}) = \frac{3}{1-z^{-1}}; \quad \underline{X}(z) = \frac{3z}{z-1}. \quad \text{Weiterhin gilt} \quad \underline{G}(z) = \frac{2 \cdot z^2 - 0.5 \cdot z - 0.5}{z^2 + 0.5z - 0.5}.$$

$$\underline{Y}(z^{-1}) = \underline{X}(z^{-1}) \cdot \underline{G}(z^{-1}) = \frac{6 - 1.5z^{-1} - 1.5z^{-2}}{1 - 0.5z^{-1} - z^{-2} + 0.5z^{-3}} \quad (\text{Summenform für Polynomdivision})$$

$$\underline{Y}(z) = \underline{X}(z) \cdot \underline{G}(z) = \frac{3 \cdot z}{z-1} \cdot \frac{2 \cdot z^2 - 0.5 \cdot z - 0.5}{(z+1)(z-0.5)} \quad (\text{Nenner für PBZ in Produktform})$$

b.) Ansatz zur Partialbruch-Zerlegung mit nur einfachen, reellen Polen nach Seite 122 :

$$\frac{\underline{Y}(z)}{z} = \frac{\text{Zähler}(z)}{\text{Nenner}(z)} = \frac{6z^2 - 1.5z - 1.5}{(z-1)(z+1)(z-0.5)} = \frac{6z^2 - 1.5z - 1.5}{z^3 - 0.5z^2 - z + 0.5} = \frac{r_1}{z-1} + \frac{r_2}{z+1} + \frac{r_3}{z-0.5}$$

Die Berechnung der Residuen r_1, r_2, r_3 kann auf zwei Wegen erfolgen:

$$r_1 = \frac{\underline{Y} \cdot (z-1)}{z} \Big|_{z=1} = \frac{6z^2 - 1.5z - 1.5}{(z+1)(z-0.5)} \Big|_{z=1} = 3;$$

$$r_2 = \frac{\underline{Y} \cdot (z+1)}{z} \Big|_{z=-1} = \frac{6z^2 - 1.5z - 1.5}{(z-1)(z-0.5)} \Big|_{z=-1} = 2;$$

$$r_3 = \frac{\underline{Y} \cdot (z-0.5)}{z} \Big|_{z=0.5} = \frac{6z^2 - 1.5z - 1.5}{(z-1)(z+1)} \Big|_{z=0.5} = 1 \quad \text{oder mit der Nennerableitung}$$

$$r_1 = \frac{\text{Zähler}(z)}{d \text{ Nenner}(z) / dz} \Big|_{z=1} = \frac{6z^2 - 1.5z - 1.5}{3z^2 - z - 1} \Big|_{z=1} = 3;$$

$$r_2 = \frac{\text{Zähler}(z)}{d \text{ Nenner}(z) / dz} \Big|_{z=-1} = \frac{6z^2 - 1.5z - 1.5}{3z^2 - z - 1} \Big|_{z=-1} = 2;$$

$$r_3 = \frac{\text{Zähler}(z)}{d \text{ Nenner}(z) / dz} \Big|_{z=0.5} = \frac{6z^2 - 1.5z - 1.5}{3z^2 - z - 1} \Big|_{z=0.5} = 1$$

Vor der gliedweisen Rücktransformation wird die PBZ der Bildfunktion wieder in der ursprünglichen Form angeschrieben:

$$\underline{Y}(z) = \frac{3 \cdot z}{z-1} + \frac{2 \cdot z}{z+1} + \frac{1 \cdot z}{z-0.5}$$

Mit der Tabelle auf Seite 109 erhält man für die drei Summanden der PBZ nach den Entsprechungen Nr. 1 mit Faktor $r_1 = 3$, Nr. 2 mit Faktor $r_2 = 2$ und Nr. 5 mit Faktor $r_3 = 1$ und $a=0.5$ die gesuchte Folge am Ausgang

$$a[k] = [3 + 2 \cdot (-1)^k + 0.5^k] \cdot \sigma[k]$$

Aus dieser Gleichung berechnet man nun die Zahlenwerte der Ausgangsfolge

$$a[0] = 6; \quad a[1] = 1.5; \quad a[2] = 5.25; \quad a[3] = 1.125; \quad a[4] = 5.0625; \quad a[5] = 1.0313$$

c.) Für die Polynomdivision benötigt man die Summenform. Statt $A(z^{-1})$ könnte auch $A(z)$ für diese Rechnung verwendet werden. Wichtig ist dabei, dass beide Polynome nach fallenden Potenzen von z angeschrieben werden ($\dots, z^3, z^2, z^1, z^0, z^{-1}, z^{-2}, z^{-3}, \dots$).

$$A(z^{-1}) = \frac{6 - 1.5z^{-1} - 1.5z^{-2}}{1 - 0.5z^{-1} - z^{-2} + 0.5z^{-3}} \quad (\text{Rechnung hier mit 4 Nachkommastellen})$$

$$\begin{array}{r} 6.0000 - 1.5000z^{-1} - 1.5000z^{-2} + 0.0000z^{-3} : 1.0000 - 0.5000z^{-1} - 1.0000z^{-2} + 0.5000z^{-3} = \quad \text{Ergebnis siehe unten.} \\ 6.0000 - 3.0000z^{-1} - 6.0000z^{-2} + 3.0000z^{-3} \quad = 6.0000 + 1.5000z^{-1} + 5.2500z^{-2} + 1.1250z^{-3} + 5.0625z^{-4} + 1.0313z^{-5} + \dots \\ \hline + 1.5000z^{-1} + 4.5000z^{-2} - 3.0000z^{-3} + 0.0000z^{-4} \\ + 1.5000z^{-1} - 0.7500z^{-2} - 1.5000z^{-3} + 0.7500z^{-4} \\ \hline \quad + 5.2500z^{-2} - 1.5000z^{-3} - 0.7500z^{-4} + 0.0000z^{-5} \\ \quad + 5.2500z^{-2} - 2.6250z^{-3} - 5.2500z^{-4} + 2.6250z^{-5} \\ \hline \quad \quad + 1.1250z^{-3} + 4.5000z^{-4} - 2.6250z^{-5} + 0.0000z^{-6} \end{array}$$

Die Rechnung kann nach diesem Schema beliebig fortgesetzt werden. Auch wenn nur ein bestimmter Wert $a[k]$ der Folge benötigt wird, müssen alle Vorgänger $a[0], a[1], a[2], \dots, a[k-1]$ berechnet werden.

Ü 74:

a.) Die Übertragungs-Funktion ermittelt man über den Spannungsteiler :

$$\underline{G}(s) = \frac{U_A}{U_E} = \frac{r + \frac{1}{sc_2}}{r + \frac{1}{sc_2} + \frac{1}{sc_1}} = \frac{1 + s \cdot rc_2}{(1 + \frac{c_2}{c_1})(1 + s \cdot r \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2})} = \frac{1 + 5 \cdot s}{6 \cdot (1 + s \cdot 5/6)}$$

$\underline{G}(0) = \frac{1}{6}$; $\underline{G}(\rightarrow \infty) = 1$

Betrag im Bode- Diagramm : $0 < \omega \leq 0.2$: 0 dB/Dek. , Knick nach oben bei $\omega_0 = 0.2$
 $0.2 < \omega \leq 1.2$: +20 dB/Dek. , Knick nach unten bei $\omega_\infty = 1.2$
 $1.2 < \omega < \infty$: 0 dB/Dek.

b.) $s \Rightarrow \frac{2}{1s} \cdot \frac{z-1}{z+1} = \frac{4(z-1)}{z+1}$ eingesetzt in $\underline{G}(s) = \frac{1+5 \cdot s}{6+5 \cdot s}$ ergibt $\underline{G}(z) = \frac{21 \cdot z - 19}{26 \cdot z - 14}$

c.) $x_1 = 0 \Rightarrow z = 1$: $\underline{G}(x_1 = 0) = \frac{21 - 19}{26 - 14} = \frac{1}{6}$

$x_2 = 0.2 \Rightarrow z = 0.3090 + j 0.9511$: $\underline{G}(x_2 = 0.2) = 0.8786 + j 0.2940 = 0.9265 \cdot e^{j18.50^\circ}$

d.) Das Netzwerk ist kausal, da die EIA (Polynomdivision von $\underline{G}(z^{-1}) = \frac{21 - 19 \cdot z^{-1}}{26 - 14 \cdot z^{-1}}$) mit dem Wert 21/26 bei $k=0$ beginnt und davor gleich Null ist.

e.) Die Polstelle liegt bei $z = 14/26$ im Inneren des Einheitskreises: Das Netzwerk verhält sich stabil.

Ü 75: Allgemein: $\underline{U}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} u[n] \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} k n}$. Mit $N = 10$: $\underline{U}[k] = \sum_{n=0}^9 u[n] \cdot e^{-j \frac{\pi}{5} k n}$

$\underline{U}[0] = \sum_{n=0}^9 u[n] \cdot e^{-j0} = 17.0000 + j 0.0000$

$\underline{U}[1] = \sum_{n=0}^9 u[n] \cdot e^{-j n \cdot 36^\circ} = +1.0000 + j 0.0000 \quad + 1.6180 - j 1.1756 \quad + 0.9271 - j 2.8532 +$
 $-0.6180 - j 1.9021 \quad - 0.8090 - j 0.5878 \quad - 2.0000 + j 0.0000 +$
 $-2.4271 + j 1.7634 \quad - 0.6180 + j 1.9021 \quad + 0.3090 + j 0.9511 +$
 $+0.0000 + j 0.0000 \quad = -2.6180 - j 1.9021 \quad = 3.2361 \cdot e^{-j144^\circ}$

$\underline{U}[2] = \sum_{n=0}^9 u[n] \cdot e^{-j n \cdot 72^\circ} = +1.0000 + j 0.0000 \quad + 0.6180 - j 1.9021 \quad - 2.4271 - j 1.7634 +$
 $-1.6180 + j 1.1756 \quad + 0.3090 + j 0.9511 \quad + 2.0000 + j 0.0000 +$
 $+0.9271 - j 2.8532 \quad - 1.6180 - j 1.1756 \quad - 0.8090 + j 0.5878 +$
 $+0.0000 + j 0.0000 \quad = -1.6180 - j 4.9798 \quad = 5.2361 \cdot e^{-j108^\circ}$