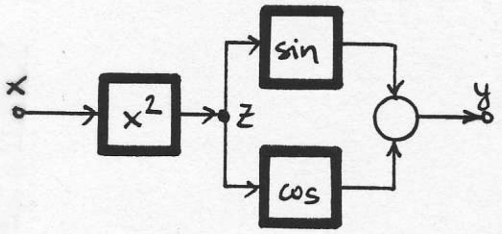
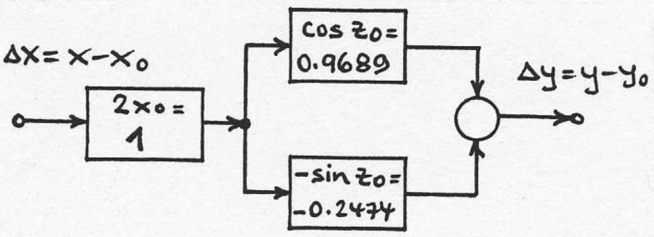
I.) a.) $y(x) = \sin(x^2) + \cos(x^2)$

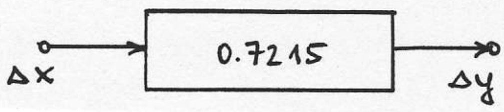


b.) $x^2 \;\rightarrow\; \frac{d\,x^2}{dx}|_{x=x_0} = 2\cdot x_0 = 1\;;\quad z_0 = x_0^2 = 0.25\;;$

$\sin(...) \;\rightarrow\; \frac{d\,\sin(z)}{dz}|_{z=z_0} = \cos(z_0) = 0.9689\;;$

$\cos(...) \;\rightarrow\; \frac{d\,\cos(z)}{dz}|_{z=z_0} = -\sin(z_0) = -0.2474$





c.) $\frac{dy}{dx}|x_0 = 2\cdot x_0 \cdot [\cos(x_0^2) - \sin(x_0^2)] = 0.7215\;;\quad \Delta y = y - y_0 = \Delta x \cdot (0.9689 - 0.2474) = \Delta x \cdot 0.7215$

d.) Berechnung der exakten Werte : $y_{exakt}(x_0) = 0.2474 + 0.9689 = 1.2163 = y_0$

$y_{exakt}(x_1) = 0.3523 + 0.9359 = 1.2882 = y_1;\quad y_{exakt}(x_2) = 0.0399 + 0.9992 = 1.0392 = y_2$

$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = (0.6 - 0.5) = 0.1\;;\quad \Delta y_1 = \Delta x_1 \cdot 0.7215 = 0.0722$ [$|\Delta|$ klein $\rightarrow$ $|\epsilon|$ klein]

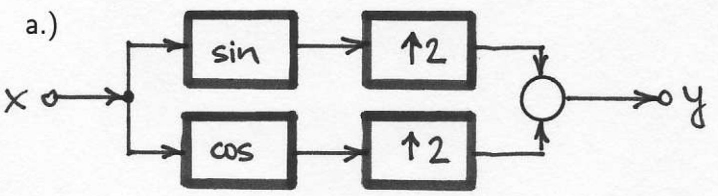
$y_{lin}(x_1) = y_0 + \Delta y_1 = 1.2163 + 0.0722 = 1.2885\;;\quad \epsilon_1 = \frac{y_{lin}(x_1) - y_{exakt}(x_1)}{y_{exakt}(x_1)} = \frac{1.2885 - 1.2882}{1.2882} = 0.0002$

$\Delta x_2 = x_2 - x_0 = (0.2 - 0.5) = -0.3\;;\quad \Delta y_2 = \Delta x_2 \cdot 0.7215 = -0.2165$ [$|\Delta|$ groß $\rightarrow$ $|\epsilon|$ groß]

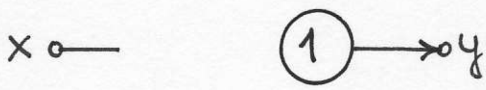
$y_{lin}(x_2) = y_0 + \Delta y_2 = 1.2163 - 0.2165 = 0.9998\;;\quad \epsilon_2 = \frac{y_{lin}(x_2) - y_{exakt}(x_2)}{y_{exakt}(x_2)} = \frac{0.9998 - 1.0392}{1.0392} = -0.0379$

II.) Für alle Werte von x gilt y=1 (Definition von sinus und cosinus am rechtwinkeligen Dreieck).
Da das Ergebnis die von x unabhängige Konstante 1 ist, ist hier keine Linearisierung erforderlich.

a.)

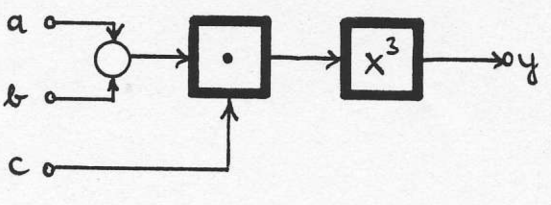


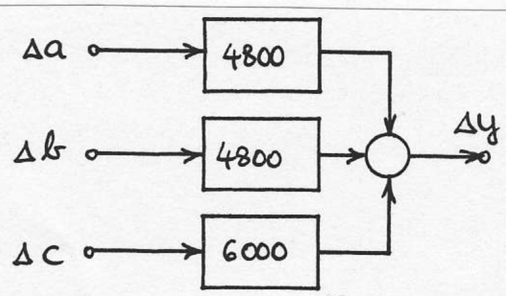
b.)



III.) a.) $y(a,b,c) = [\,(a+b)\cdot c\,]^3$.

b.) Berechnung der Konstanten siehe unten.





$\frac{\delta y}{\delta a} = \frac{\delta y}{\delta b} = 3\cdot(a\cdot c + b\cdot c)^2 \cdot c|_{AP} = 3(2\cdot 4 + 3\cdot 4)^2 \cdot 4 = 4800$

$\frac{\delta y}{\delta c} = 3\cdot(a\cdot c + b\cdot c)^2 \cdot (a+b)|_{AP} = 3(2\cdot 4 + 3\cdot 4)^2 \cdot (2+3) = 6000$

$\Delta y = \Delta a \cdot \frac{\delta y}{\delta a} + \Delta b \cdot \frac{\delta y}{\delta b} + \Delta c \cdot \frac{\delta y}{\delta c} = 4800 \cdot (\Delta a + \Delta b) + 6000 \cdot \Delta c$

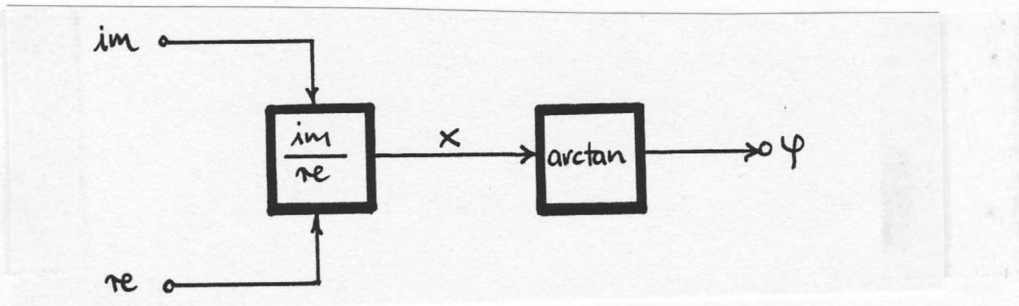
c.) $y_0 = y_{exakt}(a_0, b_0, c_0) = 8000\;;\quad y_1 = y_{exakt}(a_1, b_1, c_1) = 9690.8\;;\quad y_2 = y_{exakt}(a_2, b_2, c_2) = 7414.9$

$\Delta a_1 = 0.1\;;\quad \Delta b_1 = 0.1\;;\quad \Delta c_1 = 0.1\;;\qquad \Delta a_2 = 0\;;\quad \Delta b_2 = 0\;;\quad \Delta c_2 = -0.1.$

$\Delta y_1 = 4800 \cdot (0.1 + 0.1) + 6000 \cdot 0.1 = 1560\;;\quad y_{1\,lin} = y_0 + \Delta y_1 = 9560$: Δ groß, Fehler groß.

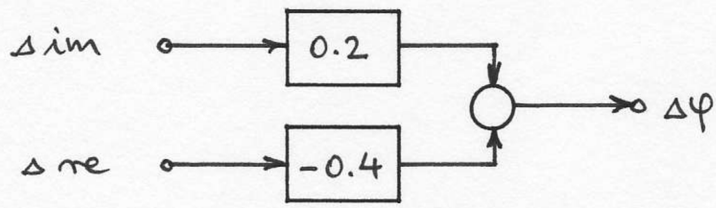
$\Delta y_2 = 4800 \cdot (0 + 0) + 6000 \cdot (-0.1) = -600\;;\quad y_{2\,lin} = y_0 + \Delta y_2 = 7400$: Δ klein, Fehler klein.

IV.) a.) Der Wert der Hilfsgröße x im Arbeitspunkt beträgt $x_0 = \frac{im_0}{re_0} = 2.$



b.) $\frac{\delta \varphi}{\delta\, im}|_{AP} = [\frac{1}{re} \cdot \frac{1}{1+(im/re)^2}]_{AP} = 0.2$ $\frac{\delta \varphi}{\delta\, re}|_{AP} = [\frac{-im}{re^2} \cdot \frac{1}{1+(im/re)^2}]_{AP} = -0.4$

$\Delta\varphi = \Delta im \cdot \frac{\delta \varphi}{\delta\, im}|_{AP} + \Delta re \cdot \frac{\delta \varphi}{\delta\, re}|_{AP} = \Delta im \cdot 0.2 - \Delta re \cdot 0.4$

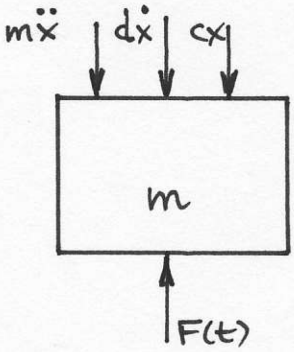


c.) $\varphi_0 = \arctan \frac{2}{1} = 1.1071$

$\Delta im = im - im_0 = 0.1$; $\Delta re = re - re_0 = -0.05$; $\Delta\varphi = [\,0.1 \cdot 0.2 - (-0.05) \cdot 0.4\,] = 0.04$

$\varphi_{lin} = \varphi_0 + \Delta\varphi = 1.1471$; $\varphi_{exakt} = \arctan \frac{2.1}{0.95} = 1.1460.$ Kleine Δ ergeben kleinen Fehler.

V.) a.) Alle Kräfte, die auf die Masse $\mathbf{m}$ wirken, sind im Bild eingetragen.



$$\mathbf{F(t) = m \cdot \ddot{x} + d \cdot \dot{x} + c \cdot x}$$

b.) $\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s}) = \underline{\mathbf{X}}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{s^2} + \underline{\mathbf{X}}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{s} + \underline{\mathbf{X}}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{c} = \underline{\mathbf{X}}(\mathbf{s}) \cdot [\,\mathbf{m} \cdot \mathbf{s^2} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{c}\,]$

c.) $\underline{\mathbf{G}}(\mathbf{s}) = \frac{\underline{\mathbf{X}}(\mathbf{s})}{\underline{\mathbf{F}}(\mathbf{s})} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m \cdot s^2 + d \cdot s + c}}$

d.) Der aperiodische Grenzfall liegt genau dann vor, wenn in der Charakteristischen Gleichung (d.h.im Nenner der Übertragungs-Funktion) eine doppelte Nullstelle auftritt:

$$\mathbf{m \cdot s^2 + d \cdot s + c = 0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{c}{m} = 0}$$

Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $\mathbf{s_{1,2} = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4m^2} - \frac{c}{m}}}$

fallen nur dann zusammen, wenn der Ausdruck unter der Wurzel [die Diskriminante] gleich Null wird. Die Bedingung für den aperiodischen Grenzfall lautet deshalb

$\mathbf{\frac{d^2}{4m^2} = \frac{c}{m}}$ woraus der gesuchte Kennwert für den Dämpfer $\mathbf{d = 2\sqrt{c \cdot m}}$ folgt.

I.) a.) Einzutragen sind noch die jeweils konjugiert komplexen Polstellen bei $s = -3+j$ und bei $s = -1-2j$ sowie die sechsfache Nullstelle bei $s \to \infty$.

b.) Für jede reelle Polstelle steht im Nenner ein Faktor der Form $(s - s_{\infty\,\mu})$.
Konjugiert komplexe Paare werden zusammengefasst zu $(s^2 - 2\alpha_{\infty\,\mu} \cdot s + \alpha^2_{\infty\,\mu} + \beta^2_{\infty\,\mu})$.

$\underline{G}(s) = \frac{0.1}{(s+2)(s+5)(s^2+2s+5)(s^2+6s+10)} = \frac{\text{Zählerpolynom } \underline{Z}(s)}{\text{Nennerpolynom } \underline{N}(s} = \frac{\underline{Z}(s)}{\underline{C}(s)}$

• Ja, da alle Pole von $\underline{G}(s)$ bzw. die NS von $\underline{C}(s)$ einen negativen Realteil haben.
• $n_Z = 0$; $n_N = 6$; $n =$ max $\{n_Z, n_N\} = 6$
• Ja, da zwei konjugiert komplexe Polpaare vorhanden sind existieren zwei (gedämpfte) Eigenschwingungen ($\omega_1 = 1$; $\omega_2 = 2$).
• Ja, da der Nennergrad höher ist als der Zählergrad. Deshalb sinkt $|\underline{G}(s = j\omega)|$ zu hohen Frequenzen hin ab. Nur in diesem Fall ist prinzipiell eine Realisierung mit technischen aktiven Elementen möglich.
• Ja, weil $\underline{C}(s)$ ein Hurwitz- Polynom ist.
• Ja, da an keinem Ort mehrere Pole zusammenfallen. Auch die konj. kompl. Paare sind hier einfach!

c.) $\underline{G}(s) = \frac{\underline{r}_1}{s+2} + \frac{\underline{r}_2}{s+5} + \frac{\underline{r}_3}{s+1-2j} + \frac{\underline{r}_3^*}{s+1+2j} + \frac{\underline{r}_4}{s+3-j} + \frac{\underline{r}_4^*}{s+3+j}$

d.) $\underline{F}_{EIA}(s) = \underline{E}(s) \cdot \underline{G}(s) = 1 \cdot \underline{G}(s)$; $g(t) = r_1 e^{-2t} + r_2 e^{-5t} + k_3 e^{-t} sin(2t + \varphi_1) + k_4 e^{-3t} sin(t + \varphi_2)$

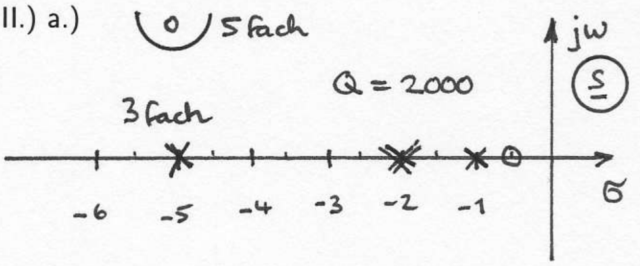
e.) $\underline{F}_{ESA}(s) = \underline{E}(s) \cdot \underline{G}(s) = \frac{1}{s} \cdot \underline{G}(s) = \frac{0.1}{s(s+2)(s+5)(s^2+2s+5)(s^2+6s+10)}$. Andere Konstanten als in $\underline{G}(s)$:

$\underline{F}_{ESA}(s) = \frac{\underline{k}_0}{s} + \frac{\underline{k}_1}{s+2} + \frac{\underline{k}_2}{s+5} + \frac{\underline{k}_3}{s+1-2j} + \frac{\underline{k}_3^*}{s+1+2j} + \frac{\underline{k}_4}{s+3-j} + \frac{\underline{k}_4^*}{s+3+j}$

$h(t) = k_0 + k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-5t} + K_3 e^{-t} \sin(2t + \varphi_3) + K_4 e^{-3t} \sin(t + \varphi_4) = \int_{\tau=0}^{t} g(\tau) d\tau$

f.) $\tau = -\frac{1}{\alpha_\infty}$: Zeitkonstanten $T_1 = \frac{1}{2}$; $T_2 = \frac{1}{5}$; Abklingzeitkonstanten $T_3 = 1$; $T_4 = \frac{1}{3}$

II.) a.)



b.) $\underline{G}(0) = \frac{4000 \cdot 0.5}{2 \cdot 5^3 \cdot 2^2 \cdot 1} = 2 \hat{=} 6.02\ dB$

c.) • Ja, Re$\{\alpha_\infty\} < 0$
• $n_Z = 1$; $n_N = 6$; $n = 6$
• Nein, nur reelle Postellen.
• Ja, da 5-fache NS bei ∞.
• Ja, da C(s) ein Hurwitz- Polynom ist.
• Nein, bei s=-2 doppelt, bei s=-5 dreifach.

d.) $\underline{G}(s) = \frac{r_1}{s+1} + \frac{r_{2,1}}{(s+2)^1} + \frac{r_{2,2}}{(s+2)^2} + \frac{r_{3,1}}{(s+5)^1} + \frac{r_{3,2}}{(s+5)^2} + \frac{r_{3,3}}{(s+5)^3}$

e.) $\underline{F}_{EIA}(s) = \underline{G}(s)$; $g(t) = r_1 e^{-t} + r_{2,1} e^{-2t} + r_{2,2} \cdot t \cdot e^{-2t} + r_{3,1} e^{-5t} + r_{3,2} \cdot t \cdot e^{-5t} + \frac{r_{3,3}}{2} \cdot t^2 \cdot e^{-5t}$

f.) $\underline{F}_{ESA}(s) = \frac{\underline{G}(s)}{s} = \frac{k_0}{s} + \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_{2,1}}{(s+2)^1} + \frac{k_{2,2}}{(s+2)^2} + \frac{k_{3,1}}{(s+5)^1} + \frac{k_{3,2}}{(s+5)^2} + \frac{k_{3,3}}{(s+5)^3}$

$h(t) = k_0 + k_1 e^{-t} + k_{2,1} e^{-2t} + k_{2,2} \cdot t \cdot e^{-2t} + k_{3,1} e^{-5t} + k_{3,2} \cdot t \cdot e^{-5t} + \frac{k_{3,3}}{2} \cdot t^2 \cdot e^{-5t} = \int_{\tau=0}^{t} g(\tau) d\tau$

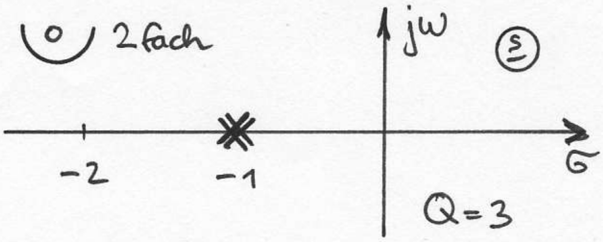
g.) $\tau = -\frac{1}{\alpha_\infty}$: Hier gibt es nur die Zeitkonstanten $T_1 = 1$; $T_2 = \frac{1}{2}$; $T_3 = \frac{1}{5}$.

III.) a.) $\underline{G}_S(s) = \frac{3}{s} + \frac{10}{s+5} - \frac{4}{s+4} - \frac{9}{s+2} + \frac{20}{s^2+s+4.25} = \frac{3}{s} + \frac{10}{s+5} - \frac{4}{s+4} - \frac{9}{s+2} - \frac{j5}{s+0.5-j2} + \frac{j5}{s+0.5+j2}$

μ	b.) Pole $\alpha_{\infty\,\mu}$	c.) Zeitkonstanten	c.) Abklingzeitkonstanten	c.) Eigenfrequenzen
1	0	$\to \infty$	—	—
2	-5	0.2	—	—
3	-4	0.25	—	—
4	-2	0.5	—	—
5,6	-0.5± j2	—	2	2

• Regelstrecke ohne Ausgleich, da EIA $g(t \to \infty) \neq 0$ (I- Anteil durch Pol bei s=0).
• Charakteristische Gleichung $\underline{C}(s) \hat{=}$ Nenner von $\underline{G}_S(s)$: $n_C = n = 6$.
• Instabil (genauer grenzstabil, d.h. an der Stabilitätsgrenze) durch Pol bei s=0.
• Die ist Strecke schwingungsfähig: Ein Summand der EIA g(t) beschreibt eine gedämpfte Schwingung.
• Alle Polstellen sind nur einfach.
• $g(t = 0+) = 0$; $g(t \to \infty) = 3$.

IV.) a.) Die Pole, berechnet aus
$5(s^2 + 2s + 1) = 0$,
liegen bei $s_{\infty\,1,2} = -1$ (doppelt)
Konstante: $Q = \frac{15}{5} = 3$
NS doppelt bei $s \to \infty$ (Gradunterschied).



b.) $\underline{G}(0) = \frac{15}{5} = 3 \widehat{=} 9.54$ dB

c.) Für diese einfache Bildfunktion ist keine PBZ erforderlich, da sie direkt in der Laplace- Tabelle enthalten ist: $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{3}{(s+1)^2}\} = 3 \cdot t \cdot e^{-t}$. Laplace- Rücktransformation nach Seite 26, Nr. 6.

d.) Lösungsweg 1 über die PBZ: $\underline{F}_{ESA}(s) = \frac{1}{s} \cdot \underline{G}(s) = \frac{3}{s(s+1)^2} = \frac{r_0}{s} + \frac{r_{1,1}}{(s+1)^1} + \frac{r_{1,2}}{(s+1)^2}$.
Mit den Residuen $r_0 = 3$; $r_{1,1} = -3$; $r_{1,2} = -3$ erhält man $h(t) = 3 - 3e^{-t} - 3te^{-t}$.

Lösungsweg 2 mit der Laplace- Tabelle (Seite 27, Nr. 12): $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{3}{s(s+1)^2}\} = 3[\,1 - (1+t) \cdot e^{-t}\,]$.

e.) Zum Übergang von der Übertragungs- Funktion auf die DGL sind nach dem Ausmultiplizieren der Übertragungs- Funktion $\underline{A}(s)[\,5s^2 + 10s + 5\,] = \underline{E}(s) \cdot 15$ folgende Ersetzungen nötig:

$$s^2 \to \frac{d^2}{dt^2}\;; \quad s \to \frac{d}{dt}\;; \quad \underline{A}(s) \to a(t)\;; \quad \underline{E}(s) \to e(t)$$

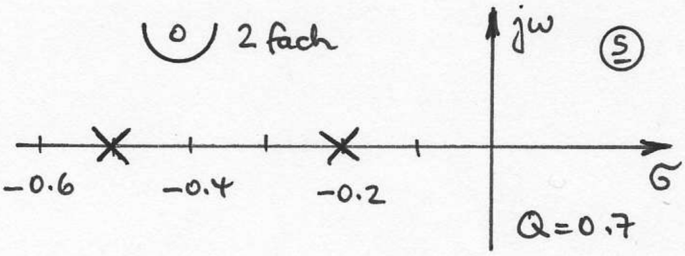
Damit ermittelt man die gesuchte DGL $5\ddot{a} + 10\dot{a} + 5a = 15e$, deren Eigenwerte die NS der Charakteristischen Gleichung $\underline{C}(s)$ und damit die Polstellen von $\underline{G}(s)$ sind: $\lambda_{1,2} = s_{\infty\,1,2} = -1$

V.) a.) Zum Übergang auf die Übertragungs- Funktion sind in der DGL folgende Ersetzungen nötig:

$$\frac{d^2}{dt^2} \to s^2\;; \quad \frac{d}{dt} \to s\;; \quad a(t) \to \underline{A}(s)\;; \quad e(t) \to \underline{E}(s)$$

$$\underline{A}(s)[\,1 + 7s + 10s^2\,] = \underline{E}(s) \cdot 7\;; \quad \underline{G}(s) = \frac{\underline{A}(s)}{\underline{E}(s)} = \frac{7}{1 + 7s + 10s^2} = \frac{0.7}{s^2 + 0.7s + 0.1} = \frac{7}{(1+2s)(1+5s)}$$

b.)
Konstante $Q = \frac{7}{10} = 0.7$
Aus $s^2 + 0.7s + 0.1 = 0$
folgt für die Polstellen
$s_{\infty\,1} = -0.2$; $s_{\infty\,2} = -0.5$
Durch den Gradunterschied
liegen die NS bei $s_{0\,1,2} \to \infty$



c.) Form 1: $\underline{F}_{EIA}(s) = \underline{G}(s) = \frac{0.7}{(s+0.2)(s+0.5)}$ Form 2: $\underline{F}_{EIA}(s) = \underline{G}(s) = \frac{7}{(1+5s)(1+2s)}$
Beachten Sie die unterschiedlichen Konstanten im Zähler! Dies ist eine häufige Fehlerquelle!

Berechnet man eine PBZ, <u>muss</u> immer die Form 1 verwendet werden: $\underline{F}_{EIA}(s) = \frac{0.7/0.3}{s+0.2} - \frac{0.7/0.3}{s+0.5}$

Die direkte Rücktransformation der gesamten Bildfunktion erfolgt nach Seite 27:

Für die Form1 mit Nr. 17 (mit a=0.2, b=0.5) für die Form 2 mit Nr. 18 (mit a=5, b=2).

$$g(t) = \frac{0.7(e^{-0.2t} - e^{-0.5t})}{0.3} = \frac{7}{3} \cdot (e^{-t/5} - e^{-t/2})$$

d.) Form 1: $\underline{F}_{ESA}(s) = \frac{\underline{G}(s)}{s} = \frac{0.7}{s(s+0.2)(s+0.5)}$ Form 2: $\underline{F}_{ESA}(s) = \frac{7}{s(1+5s)(1+2s)}$
Beachten Sie auch hier die unterschiedlichen Konstanten im Zähler! Hier werden häufig Fehler gemacht!

Berechnet man eine PBZ, <u>muss</u> immer die Form 1 verwendet werden: $\underline{F}_{ESA}(s) = \frac{7}{s} - \frac{35/3}{s+0.2} + \frac{14/3}{s+0.5}$

Die direkte Rücktransformation der gesamten Bildfunktion erfolgt nach Seite 27:

Für die Form1 mit Nr. 19 (mit a=0.2, b=0.5) für die Form 2 mit Nr. 20 (mit a=5, b=2).

$$h(t) = 7[\,1 - \tfrac{5}{3}e^{-0.2t} + \tfrac{2}{3}e^{-0.5t}\,] = 7[\,1 - \tfrac{5}{3}e^{-t/5} + \tfrac{2}{3}e^{-t/2}\,] = \int_{\tau=0}^{t} g(\tau)d\tau$$

Aufgabe 1: a.) 1.) $\mathbf{Q = \frac{200 \cdot 2.5}{0.5} = 10^3}$; 2.) $\mathbf{n_1 = 5}$; $\mathbf{n_o = 5}$; $\mathbf{n_\infty = 5}$; 3.) $|\underline{\mathbf{G}}_1(\omega \to \mathbf{0})|$=10≙20 dB.

4.) $\varphi(\omega \to \infty) = \mathbf{-360°}$; 5.) $\frac{\mathbf{dG}}{\mathbf{d}\omega}|_{\omega \to \infty} = \mathbf{-80 \frac{dB}{Dekade}}$.

b.)

μ	$s_{0\,\mu}$	$\omega_{g0\,\mu}$	τ_μ
1	-0.5	0.5	2
2 - 5	$\to \infty$	entfällt	entfällt

μ	α_μ	β_μ	$\omega_{0\,\mu}$	τ oder τ_{ab}
1	-2	0	entfällt	$\tau = -1/\alpha = 0.5$
2,3	-0.1	0.994987	$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 1$	$\tau_{ab} = -1/\alpha = 10$
4,5	-1	4.898979	$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 5$	$\tau_{ab} = -1/\alpha = 1$

c.)

Eigenschaft	ja	nein	kurze Begründung Ihrer Aussage
nur einfache Polstellen	X	○	siehe den PN-Plan und Produktform
schwingungsfähig	X	○	enthält konjugiert komplexes Polpaar (hier sogar 2 Paare)
enthält I-Anteil	○	X	kein Pol bei s = 0

d.) $|\underline{\mathbf{G}}_{\mathbf{max}}| = \mathbf{40.329\,dB}$≙$\mathbf{103.9}$ bei $\omega_{\mathbf{max}} = \mathbf{0.9967}$; $\varphi_{\mathbf{max}} = \mathbf{21.056°}$ bei $\omega_{\mathbf{max}} = \mathbf{0.5045}$.

Die Minimal- und Maximalwerte im berechneten Frequenzbereich werden zunächst an den y-Achsen angezeigt. Der Benutzer kann jedoch auch bei Bedarf Auschnittsvergrößerungen einstellen.

Aufgabe 2:

Die gegebene Einheits-Sprung-Antwort

$$\mathbf{ESA_2(t) = h_2(t) = [\,12 + 6 \cdot e^{-t} + (144 + 24 \cdot t) \cdot e^{-t/2} - 162 \cdot e^{-t/3}\,] \cdot \sigma(t)}$$

wird unter der Verwendung der Entsprechungen Nr. 2, Nr. 5 und Nr. 6 auf Seite 26 gliedweise in den Bildbereich übertragen. Das Ergebnis ist die folgende Partial-Bruch-Zerlegung.

$$\underline{\mathbf{H}}_2(s) = \frac{\mathbf{12}}{s} + \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{s+1}} + \frac{\mathbf{144}}{\mathbf{s+1/2}} + \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{(s+1/2)^2}} - \frac{\mathbf{162}}{\mathbf{s+1/3}}$$

Nach dem Umrechnen (siehe oben) findet man $\underline{\mathbf{H}}_2(s) = \underline{\mathbf{E}}_2(s) \cdot \underline{\mathbf{G}}_2(s)$ und daraus $\underline{\mathbf{G}}_2(s) = s \cdot \underline{\mathbf{H}}_2(s)$.

$$\underline{\mathbf{H}}_2(s) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s \cdot (s+1)(s+1/2)^2(s+1/3)}}$$

$$\underline{\mathbf{G}}_2(s) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(s+1)(s+1/2)^2(s+1/3)}} = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{1 + 8\,s + 23\,s^2 + 28\,s^3 + 12\,s^4}}$$

Die gegebene Einheits- Sprung- Antwort

$$\mathbf{ESA_3(t) = h_3(t) = [\,2 - 2.125 \cdot e^{-0.2 \cdot t} + 0.5154 \cdot e^{-0.2 \cdot t} \cdot \sin(0.8 \cdot t)\,] \cdot \sigma(t)}$$

wird unter der Verwendung der Entsprechungen Nr. 2 und Nr. 5 auf Seite 26 sowie der Nr. 21 a oder Nr. 28 auf Seite 27 gliedweise transformiert. Das Ergebnis ist eine der folgenden Partial-Bruch-Zerlegungen.

Für den letzten Summanden gilt mit Nr. 21 a: $\alpha = \mathbf{-0.2}$; $\beta = \mathbf{0.8}$; $\frac{\mathbf{K}}{\beta} = \mathbf{0.5154}$; $\mathbf{K = 0.41232}$

$$\underline{\mathbf{H}}_3(s) = \frac{\mathbf{2}}{s} - \frac{\mathbf{2.125}}{\mathbf{s+0.2}} + \frac{\mathbf{0.5154 \cdot 0.8}}{\mathbf{s^2 + 0.4s + 0.2^2 + 0.8^2}} = \frac{\mathbf{2}}{s} - \frac{\mathbf{2.125}}{\mathbf{s+0.2}} + \frac{\mathbf{0.41232}}{\mathbf{s^2 + 0.4s + 0.68}}$$

Für den letzten Summanden gilt mit Nr. 28: $\varphi = \mathbf{0°}$; $\mathbf{r_{re} = 0}$; $\mathbf{r_{im} = -0.2577}$; $\alpha = \mathbf{-0.2}$; $\beta = \mathbf{0.8}$

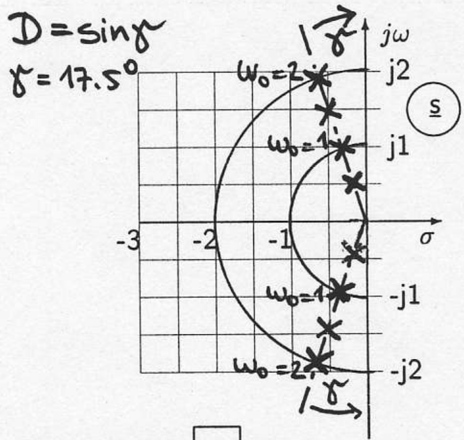
$$\underline{\mathbf{H}}_3(s) = \frac{\mathbf{2}}{s} - \frac{\mathbf{2.125}}{\mathbf{s+0.2}} + \frac{\mathbf{-j\,0.2577}}{\mathbf{s+0.2-j\,0.8}} + \frac{\mathbf{+j\,0.2577}}{\mathbf{s+0.2+j\,0.8}} = \frac{\mathbf{2}}{s} - \frac{\mathbf{2.125}}{\mathbf{s+0.2}} + \frac{\mathbf{0.41232}}{\mathbf{s^2 + 0.4s + 0.68}}$$

Nach dem Umrechnen (siehe oben) findet man $\underline{\mathbf{H}}_3(s) = \frac{1}{s} \cdot \underline{\mathbf{G}}_3(s)$ und daraus $\underline{\mathbf{G}}_3(s) = s \cdot \underline{\mathbf{H}}_3(s)$.

$$\underline{\mathbf{H}}_3(s) = \frac{\mathbf{-0.125s^3 + 0.76232s^2 + 0.157464s + 0.272}}{\mathbf{s \cdot (s+0.2)(s^2 + 0.4s + 0.68)}} = \frac{\textbf{Zählerpolynom}}{\mathbf{s \cdot (s^3 + 0.6s^2 + 0.76s + 0.136)}}$$

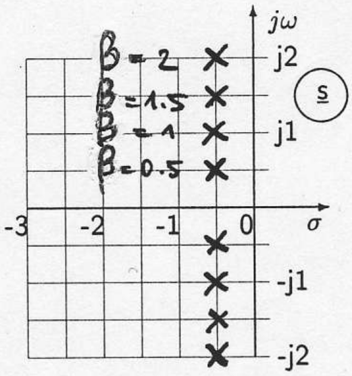
$$\underline{\mathbf{G}}_3(s) = \frac{\mathbf{-0.125s^3 + 0.76232s^2 + 0.157464s + 0.272}}{\mathbf{s^3 + 0.6s^2 + 0.76s + 0.136}}$$

Aufgabe 1 (Seite 1):



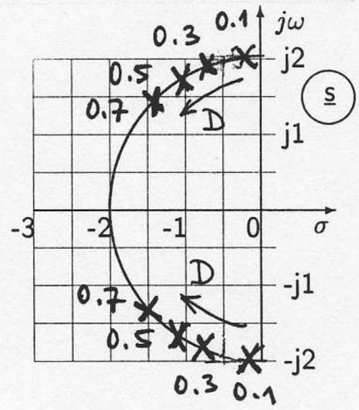
Ergebnis	ü	→	mit	ω_0	↑
Ergebnis	T_d	↓	mit	ω_0	↑
Ergebnis	T_{ab}	↓	mit	ω_0	↑
Ergebnis	G_{max}	→	mit	ω_0	↑
Ergebnis	ω_{max}	↑	mit	ω_0	↑

Aufgabe 3 (Seite 2):



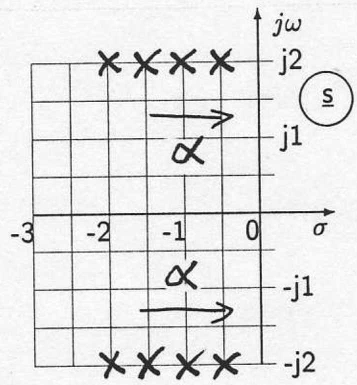
Ergebnis	ü	↑	mit	ω	↑
Ergebnis	T_d	↓	mit	ω	↑
Ergebnis	T_{ab}	→	mit	ω	↑
Ergebnis	G_{max}	↑	mit	ω	↑
Ergebnis	ω_{max}	↑	mit	ω	↑

Aufgabe 2 (Seite 1):



Ergebnis	ü	↓	mit	D	↑
Ergebnis	T_d	↑	mit	D	↑
Ergebnis	T_{ab}	↓	mit	D	↑
Ergebnis	G_{max}	↓	mit	D	↑
Ergebnis	ω_{max}	↓	mit	D	↑

Aufgabe 4 (Seite 2):



Ergebnis	ü	↑	mit	α	↑
Ergebnis	T_d	→	mit	α	↑
Ergebnis	T_{ab}	↑	mit	α	↑
Ergebnis	G_{max}	↑	mit	α	↑
Ergebnis	ω_{max}	↑	mit	α	↑

5.) Aus dem Endwert der ESA folgt $\mathbf{h(\infty) = K_P = 3.000}$.

Aus dem Maximalwert und dem Endwert des ESA wird das maximale Überschwingen berechnet.
$\mathbf{ü} = \frac{\mathbf{h_{max} - h(\infty)}}{\mathbf{h(\infty)}} = \frac{\mathbf{4.117 - 3.000}}{\mathbf{3.0000}} = \mathbf{0.3723}$. Das entspricht einem Überschwingen um $\mathbf{37.23}$ %.

Dieses Überschwingen tritt auf bei einem Dämpfungsgrad $\mathbf{D} = \frac{\mathbf{\ln[1/ü]}}{\sqrt{\pi^2 + \ln[1/ü]^2}} = \mathbf{0.3000}$.

Die Periodendauer der gedämpften Schwingung ergibt sich gemäß $\mathbf{T_d = 2 \cdot t_{max} = 1.317}$.
Damit berechnet man die gedämpfte Eigenkreisfrequenz zu $\omega_d = \frac{2\pi}{\mathbf{T_d}} = \mathbf{4.770}$.

Die zugehörige ungedämpfte Eigenkreisfrequenz hat den etwas größeren Wert $\omega_0 = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - D^2}} = \mathbf{5.000}$.
Die Zeit $\mathbf{t_1}$ ergibt sich aus der Summe von zwei Zeiten: $\mathbf{t_1 = t_{max} + \frac{3}{2} T_d = 2 \cdot T_d = 2.635}$.

Der Realteil des konjugiert komplexen Polpaares berechnet sich zu $\alpha = -\omega_0 \cdot \mathbf{D} = \mathbf{-1.500}$
und der Imaginärteil hat den Wert der gedämpften Eigenfrequenz $\beta = \omega_d = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - D^2} = \mathbf{4.770}$.

Die Abklingzeitkonstante ergibt sich gemäß $\mathbf{T_{ab}} = -\frac{1}{\alpha} = \frac{2}{3} = \mathbf{0.667}$.
Die Konstante der Produktform ist gleich der Zählerkonstante $\mathbf{Q = K_P} \cdot (\alpha^2 + \beta^2) = \mathbf{K_P} \cdot \omega_0^2 = \mathbf{75}$.

6.) a.) $$\underline{G}(s) = \frac{K_P \cdot [\alpha^2 + \beta^2]}{(s - [\alpha + j\,\beta])(s - [\alpha - j\,\beta])} = \frac{875}{(s + 5 - j10)(s + 5 + j10)}$$

b.) $$\underline{G}(s) = \frac{875}{s^2 + 10s + 125} = \frac{7}{1 + \frac{10}{125}s + \frac{1}{125}s^2} = \underline{G}_{PT2c}(s) = \frac{K_P}{1 + \frac{2D}{\omega_0}s + \frac{1}{\omega_0^2}s^2}$$

c.) Vergleicht man die Koeffizienten von $\underline{G}(s)$ mit denen von $\underline{G}_{PT2c}(s)$ findet man
im Zähler $\mathbf{7 = K_P}$ und im Nenner $\frac{10}{125} = \frac{2D}{\omega_0}$ sowie $\frac{1}{125} = \frac{1}{\omega_0^2}$
und berechnet daraus die Kennwerte $\mathbf{K_P = 7}$; $\omega_0 = \sqrt{125} = \mathbf{11.18}$; $\mathbf{D = 0.4472}$.
Der Winkel der Polstellen gegen die imaginäre Achse ergibt sich zu $\gamma = \mathbf{\arcsin(D) = 26.57°}$.

d.) Der Endwert der ESA ist gleich der Verstärkung bei tiefen Frequenzen $\mathbf{h_\infty = K_P = 7}$.

e.) Das maximale Überschwingen berechnet man zu $\mathbf{ü} = e^{-\frac{\pi D}{\sqrt{1-D^2}}} = e^{-\pi \cdot \tan\gamma} = \mathbf{0.2079 = 20.79\%}$
.

f.) $\mathbf{h_{max} = h_\infty \cdot (1 + ü) = 8.455}$

g.) $\mathbf{t_{max}} = \frac{\pi}{\beta} = \mathbf{0.3142}$

h.) Die Abklingzeitkonstante ergibt sich aus dem Realteil der Pole $\mathbf{T_{ab}} = -\frac{1}{\alpha} = \mathbf{0.2}$.

i.) Da der Dämpfungsgrad in diesem Beispiel im Bereich $\mathbf{0 < D < 0.707}$ liegt, besitzt der Frequenzgang des Betrages ein Maximum bei der Kreisfrequenz $\omega_{max} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2D^2} = \mathbf{8.660}$.

j.) Durch das schwach gedämpfte konjugiert komplexe Polpaar entsteht eine Überhöhung der Verstärkung, die über den Wert $\mathbf{K_P}$ hinausgeht. $|\mathbf{G_{max}}| = |\underline{G}(j\omega_{max})| = \frac{K_P}{2D\sqrt{1 - D^2}} = \mathbf{8.750 \widehat{=} 18.84\ dB}$

Übung 6 : 1. Aufgabe : IDENTIFIKATION ANHAND DER ESA

$$\underline{G}_{S\,1}(s) = \frac{5}{(1+3s)\cdot(1+5s)\cdot(1+10s)}$$

Reelle Polstellen mit den Zeitkonstanten: T1 = 3 sec ; T2 = 5 sec; T3 = 10 sec

$$\underline{G}_{S\,2}(s) = \frac{0.01}{s\cdot(1+0.4s+4s^2)}$$

Konjugiert komplexes Polpaar mit $\omega_0 = 0.5\ \frac{1}{sec}$; $D = 0.1$

$$\underline{G}_{S\,3}(s) = \frac{30\cdot(1+3s)}{(1+5s)\cdot(1+0.1s+0.25s^2)}\cdot e^{-3\cdot s}$$

Totzeit T tot = 3 sec ; Konjugiert komplexes Polpaar mit $\omega_0 = 2\ ;\frac{1}{sec}$; $D = 0.1$

$$\underline{G}_{S\,4}(s) = \frac{1+s}{(1+5s)\cdot(1+0.05s+0.25s^2)\cdot(1+0.00667s+0.1111s^2)}$$

Konjugiert komplexe Polpaare mit $\omega_0 = 2\ \frac{1}{sec}$; $D = 0.05$ und $\omega_0 = 3\ \frac{1}{sec}$; $D = 0.01$

$$\underline{G}_{S\,5}(s) = \frac{5\cdot(1+2s)}{(1+0.5s)\cdot(1+0.25s+0.25s^2)}\cdot\frac{1-s}{1+s}$$

Konjugiert komplexes Polpaar mit $\omega_0 = 2\ \frac{1}{sec}$; $D = 0.25$; Allpass 1 mit T = 1 sec;
reelle Nullstelle mit T = 2 sec; reelle Polstelle mit T = 0.5 sec

Übung 6 : 2. Aufgabe : IDENTIFIKATION ANHAND DES BODE- DIAGRAMMS

$$\underline{G}_{S\,1}(s) = \frac{0.01\cdot(1+s/25)}{s\cdot(1+0.04s+0.01s^2)}$$

Konjugiert komplexes Polpaar mit $\omega_0 = 10\ \frac{1}{sec}$; $D = 0.2$

$$\underline{G}_{S\,2}(s) = \frac{4}{(1+s/0.01)\cdot(1+s/0.5)\cdot(1+s/50)}\cdot e^{-0.0005\cdot s}$$

Totzeit T tot = 0.5 msec;
Reelle Polstellen mit den Zeitkonstanten: T1 = 100 sec ; T2 = 2 sec; T3 = 0.02 sec

$$\underline{G}_{S\,3}(s) = \frac{3.162}{(1+s/2)\cdot(1+s/100)}\cdot\frac{(1-s/20)}{(1+s/20)}$$

Reelle Polstellen mit den Zeitkonstanten: T1 = 0.5 sec ; T2 = 0.01 sec;
Allpass mit der Zeitkonstante T = 0.05 sec

$$\underline{G}_{S\,4}(s) = \frac{20\cdot(1+s/5)(1+s/20)}{(1+s)(1+s/100)\cdot(1+s/1000)}$$

Reelle Polstellen mit den Zeitkonstanten: T1 = 1 sec ; T2 = 10 msec; T3 = 1 msec

1. Aufgabe : $\mathbf{K_P = 0.163}$; $\mathbf{T_n = 20}$ Größte Zeitkonstante kompensieren!

2. Aufgabe : b.) $\mathbf{ü = 4.15\%}$; $\mathbf{t_{w\,1\%} = 126.9}$ c.) $\mathbf{ü_{max} = 8.77\%}$; $\mathbf{t_{w\,1\%\,max} = 142.0}$

3. Aufgabe : $|\underline{\mathbf{G}}_o(\omega_{-180^\circ})| = \mathbf{-19.315\,dB \mathrel{\hat{=}} 0.108\,21}$; $\varphi_o(\omega_D) = \mathbf{-116.04^\circ}$

$\mathbf{A_{Rd} = +19.315\,dB \mathrel{\hat{=}} 9.242 = \frac{1}{0.108\,21}}$; $\varphi_{Rd} = \mathbf{180^\circ} + \varphi_o(\omega_D) = \mathbf{+63.96^\circ}$

4. Aufgabe : a.) $\mathbf{K_P = 0.1471}$; $\mathbf{T_n = 21.491}$; $\mathbf{ü = 0.5\%}$

b.) $\mathbf{K_P = 0.3296}$; $\mathbf{T_n = 30.804}$; $\mathbf{t_{w\,5\%} = 38.57}$; $\mathbf{ü = 4.86\%}$

5. Aufgabe : $\mathbf{K_{P\,krit} = 3.389}$; $\mathbf{T_{krit} = 1.074}$; $\mathbf{K_P = 1.525}$; $\mathbf{T_n = 0.8915}$

6. Aufgabe : $\mathbf{x_{max} = 0.7895}$; $\mathbf{t_{z\,5\%} = 3.114}$

7. Aufgabe : $\mathbf{t_{z\,5\%} = 1.900}$; $\mathbf{K_P = 1.244}$; $\mathbf{T_N = 1.040}$

8. Aufgabe : $\mathbf{t_{z\,5\%} = 1.900}$; $\mathbf{x_{max} = 0.8640}$; $\mathbf{t_{w\,5\%} = 2.586}$; $\mathbf{ü = 59.92\%}$

9. Aufgabe : $\mathbf{T_{1\,FüFi} = 0.8828}$; $\mathbf{t_{w\,5\%} = 1.414}$; $\mathbf{ü = 4.71\%}$

Vergleicht man die Ergebnisse der Aufgaben 8 und 9, zeigt sich der Nutzen eines Führungs-Filters:

Mit einem optimal dimensionierten PT1-Führungs-Filter gelingt es in diesem Beispiel, das Führungsverhalten in zweifacher Weise deutlich zu verbessern:

- das maximale Überschwingen der Sprungantwort wird von dem (unbrauchbaren) Wert 59.92% auf den sehr guten Wert 4.71% reduziert
- die Ausregelzeit für ein ± 5%-Toleranzband wird von 2.586 auf 1.414 verkürzt.